Optionspriser och marknadens förväntningar

av Javiera Aguilar och Peter Hördahl
Verksamma vid penning- och valutapolitiska avdelningen

Att ta fram information ur finansiella priser är av intresse både för marknadsaktörer och för myndigheter, som exempelvis centralbanker. Marknadsaktörer är intresserade av att prognostisera den framtida volatiliteten, eftersom denna ingår som en viktig variabel i bland annat portföljstrategier. För en centralbank är det viktigt att tyda marknadsaktörernas förväntningar beträffande den framtida penningpolitiken. Det är också väsentligt för en centralbank att bilda sig en uppfattning om vad marknadsaktörerna tror om utvecklingen på diverse finansiella tillgångar, såsom aktie- och växelkurser. En centralbanks förmåga att förstå marknadens förväntningar är av stor vikt för att kunna jämföra centralbankens bild av ekonomin med marknadens syn men även för att marknadsförväntningarna i viss mån kan vara självuppfyllande.

Ett exempel på en finansiell indikator som är av intresse för centralbanker är den implicita terminsräntekurvan, som används för att skatta marknadens förväntningar beträffande den framtida styrräntan.[1] Den här typen av prognoser resulterar således endast i en skattning av den förväntade framtida räntenivån. I allmänhet får man däremot ingen uppfattning om hur stor osäkerheten är om den framtida utvecklingen, eller om marknaden bedömer att risken till största delen finns på uppåt- eller nedåtsidan. Information om marknadens bedömning av storleken på osäkerheten och eventuella asymmetrier i riskbedömningen kan däremot tas fram genom att man utnyttjar priserna på olika derivatinstrument. I den

Information om marknadens bedömning av storleken på osäkerheten och eventuella asymmetrier i riskbedömningen kan tas fram genom att man utnyttjar priserna på olika derivatinstrument.

[1] Se till exempel Svensson (1995).

här artikeln använder vi oss av optionspriser för att härleda så kallade implicita sannolikhetsfördelningar. Dessa kan nämligen tolkas som marknadens bedömning av den framtida sannolikhetsfördelningen för den underliggande tillgång som optionerna är utställda på.

Implicita sannolikhetsfördelningar

För att göra beräkningarna och tolkningarna av de implicita sannolikhetsfördelningarna lättare att förstå inleder vi med en kortfattad diskussion om optionsvärdering.[2] Det finns en mängd modeller för att prissätta optioner. Black-Scholes modell[3] (1973) är dock den absolut mest använda värderingsformeln för att prissätta europeiska optionskontrakt.[4] Modellen bygger på att den underliggande tillgångens pris, *S*, följer en så kallad geometrisk, brownsk rörelse (GBM).[5] Det innebär att den underliggande tillgångens pris kommer att vara lognormalfördelad och dess avkastning kommer att vara normalfördelad med konstant varians. Givet bland annat dessa antaganden har Black och Scholes visat att priset på en europeisk köpoption, *c*, kan skrivas som:

$$c = S\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

och där $\Phi(\cdot)$ betecknar den standardiserade kumulativa normalfördelningen, *S* är priset på den underliggande tillgången, *X* är options lösenpris, *r* är den riskfria

[2] För den som är intresserad av en grundligare genomgång av allmän optionsteori och optionsprissättning rekommenderas till exempel Hull (1998).

[3] Modifierad av Garman-Kohlhagen (1983) för valutaoptioner.

[4] Optionskontrakt kan delas in i två stora klasser: amerikanska och europeiska optioner. Europeiska optioner kan enbart lösas in på förfallodagen, medan amerikanska optioner kan lösas in när som helst under optionens löptid fram till förfallodagen.

[5] GBM är en modell för en möjlig stokastisk process som tillgångspriser kan antas följa i kontinuerlig tid. Enligt modellen kan förändringen i tillgångspriset, dS, skrivas som $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$, där μ är den förväntade avkastningen, σ är volatiliteten, dt betecknar tidsförändringen och dz är förändringen i en standardiserad Wienerprocess. Se till exempel Hull (1998) för fler detaljer.

räntan under löptiden, $(T-t)$ är optionens löptid, och σ är den underliggande tillgångens volatilitet under optionens löptid (det vill säga standardavvikelsen för den underliggande tillgångens avkastning). Av ovanstående framgår att optionspriset är en funktion av de fem variablerna S, X, r, $(T-t)$ och σ. Alla variabler har vid värderingstillfället kända värden, med undantag av volatiliteten. För att kunna prissätta optionen måste marknadsaktörerna därför uppskatta hur hög volatiliteten kan tänkas bli under optionens löptid.

Om man i stället betraktar det faktiskt noterade priset som det ”rätta” priset och löser ut volatiliteten ur Black-Scholes formel får man vad som brukar gå under benämningen *implicit volatilitet*. Den implicita volatiliteten brukar ses som en viktig informationskälla, eftersom den kan tänkas spegla marknadens förväntningar beträffande den framtida volatiliteten.[6] Om till exempel den implicita volatiliteten för en valutaoption på svenska kronor mot US-dollar med en månads löptid är 5 procent kan man tolka det som att marknaden tror att volatiliteten i SEK/USD kommer att vara ungefär 5 procent på årsbasis under den närmaste månaden.

Den implicita volatiliteten brukar ses som en viktig informationskälla, eftersom den kan tänkas spegla marknadens förväntningar beträffande den framtida volatiliteten.

Eftersom Black-Scholes modell antar att den underliggande tillgångens avkastning är normalfördelad, implicerar detta att marknadens uppfattning om osäkerheten över den framtida utvecklingen är symmetrisk. En mängd studier visar dock att priset på finansiella tillgångar sällan följer en geometrisk brownsk rörelse.[7] Det innebär att Black-Scholes modell inte håller och att den underliggande tillgångens avkastning inte är normalfördelad. Att hitta den ”sanna” fördelningen är därför av intresse, eftersom den kan ge en indikation på marknadens riskbedömning av den framtida utvecklingen.

På ungefär samma sätt som man skattar den implicita volatiliteten ur optionspriser kan man även skatta hela fördelningen för den underliggande tillgången, den så kallade implicita sannolikhetsfördelningen. Detta är möjligt, eftersom priset på en option kan skrivas som en funktion av den underliggande tillgångens sannolikhetsfördelning.[8] Om Black-Scholes

På ungefär samma sätt som man skattar den implicita volatiliteten ur optionspriser kan man även skatta hela fördelningen för den underliggande tillgången, den så kallade implicita sannolikhetsfördelningen.

[6] Se till exempel Galati och Tsatsaronis (1996) samt Aguilar (1999).
[7] Se exempelvis Campbell med flera (1997).
[8] Det explicita sambandet mellan optionspriset och sannolikhetsfördelningen finns i appendix 1.

modell och dess antaganden håller vet man att avkastningarna är normalfördelade. Då är det trivialt att härleda den implicita fördelningen genom att utnyttja den implicita volatiliteten. Det faktum att avkastningar på finansiella tillgångar inte tycks uppfylla antagandena bakom Black-Scholes modell gör emellertid att modellen i allmänhet inte är lämplig som grund för att skatta implicita fördelningar. I stället finns det ett antal alternativa tillvägagångssätt som kan användas. Valet av metod beror till stor del på vilken data man har tillgång till.

När tillgången på optionspriser är relativt god kan skattningen av fördelningen göras genom att man först utgår från en viss typ av fördelning för den underliggande tillgångens pris. Därefter skattar man de parametrar som bestämmer fördelningens specifika utseende, så att skillnaden mellan de optionspriser som impliceras av den skattade fördelningen och dem som observeras på marknaden minimeras. En specifikation som ofta används i det här sammanhanget är ett vägt genomsnitt av två lognormalfördelningar.[9] I det här fallet behöver man skatta de båda fördelningarnas väntevärden och varianser samt en viktparameter som bestämmer fördelningarnas relativa inflytande på slutresultatet. Metoden är mycket flexibel, vilket innebär att det är möjligt att erhålla ett brett spektrum av olika implicita fördelningar.[10] Denna skattningsmetod kan därför fånga upp vanliga egenskaper i finansiella avkastningar, som exempelvis asymmetrier och ”tjocka svansar” i sannolikhetsfördelningen. Med andra ord kan man ta hänsyn till avvikelserna från Black-Scholes-modellens antaganden på ett relativt enkelt sätt.

Eftersom ovanstående metod innebär att fem parametrar måste skattas kräver den också att det finns minst fem simultant noterade priser på optioner med samma löptid, men med olika lösenpris. För exempelvis den svenska OMX-optionsmarknaden är detta inget problem, åtminstone inte för de kortare löptiderna. Däremot är situationen annorlunda på valutaoptionsmarknaden, där det oftast inte finns mer än tre optionspriser noterade. I det här fallet är det därför nödvändigt att använda en annan metod för att skatta den implicita fördelningen. För valutafördelningarna har vi använt oss av Malz (1997) skattningsmetod, som inte är beroende av ett stort antal observerade optionspriser.[11]

Oavsett vilken specifik metod man använder för att skatta den implicita fördelningen kan resultatet tolkas på samma sätt. Den implicita fördelningen visar marknadens skattning av sannolikhetsfördelningen för den underliggande tillgångens pris vid en tidpunkt i framtiden, det vill säga på förfallodagen. Man bör

[9] Se Melick och Thomas (1997).

[10] Se appendix 1 för en mer utförlig beskrivning av skattningsmetoden. Se även Bahra (1997) för en noggrann genomgång av denna och andra skattningsmetoder.

[11] Se appendix 2 för en beskrivning av metoden. Se även Malz (1997).

dock notera att den skattade fördelningen är den så kallade *riskneutrala* fördelningen. Med andra ord visar den hur marknadens uppfattning om fördelningen skulle ha sett ut om marknadsaktörerna hade varit riskneutrala (se faktarutan).[12]

Den implicita fördelningen visar marknadens skattning av sannolikhetsfördelningen för den underliggande tillgångens pris vid en tidpunkt i framtiden.

Fakta: Riskneutrala sannolikhetsfördelningar

Det finns en viktig aspekt att ta hänsyn till i samband med att informationen i implicita fördelningar tolkas. De metoder som används för att prissätta optioner bygger endast på principen om avsaknad av arbitrage på de finansiella marknaderna. En stor fördel med detta är att man inte behöver bilda sig en uppfattning om hur investerarnas preferenser ser ut för att prissätta exempelvis optioner. Med andra ord påverkas inte priset på optioner eller andra derivatinstrument av graden av riskaversion hos investerarna. Som en konsekvens av detta går det inte att ur optionspriser få någon information om investerarnas preferenser. Detta innebär att den skattade implicita fördelningen inte tar hänsyn till graden av riskaversion hos investerarna, och därför brukar resultatet kallas för den *riskneutrala sannolikhetsfördelningen*.

Man kan alltså tolka den implicita fördelningen som marknadens skattning av den underliggande tillgångens framtida sannolikhetsfördelning, om marknadens aktörer vore riskneutrala. Om investerarna däremot uppvisar riskaversion kommer i allmänhet marknadens ”verkliga” uppfattning om fördelningen att skilja sig från den implicita riskneutrala sannolikhetsfördelningen. För att bilda sig en uppfattning om hur stor skillnaden är mellan fördelningarna måste investerarnas nyttofunktioner vara kända eller skattas, exempelvis genom att beräkna graden av riskaversion. Rubinstein (1994) visar att (givet antaganden om konstant relativ riskaversion och storleken på marknadens riskpremie) den sanna aktieprisfördelningen skiftar något till höger relativt den riskneutrala men att utseendet i övrigt påverkas endast marginellt. Med utgångspunkt från detta resultat verkar det rimligt att anta att variansen, skevheten och graden av kurtosis i den implicita riskneutrala fördelningen inte skiljer sig alltför mycket från marknadens uppfattning om de ”sanna” momenten. Variationer över tiden i dessa värden bör därför ge en god indikation på förändringar i marknadens bedömning av den framtida utvecklingen.

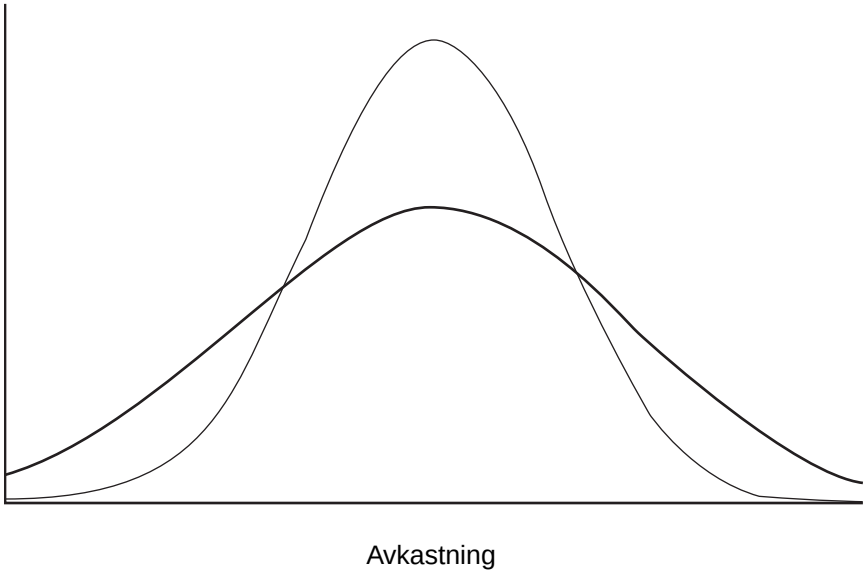
Det går att förenkla tolkningen av den information de implicita fördelningarna innehåller, genom att beräkna ett antal standardiserade mått, så kallade moment,

[12] Om en aktör är riskneutral innebär detta att han/hon är indifferent mellan exempelvis två olika investeringsalternativ med samma förväntade avkastning, även om det ena alternativet är mer riskfyllt än det andra. En följd av att den implicita fördelningen är riskneutral är att fördelningens väntevärde (medelvärde) är lika med terminspriset på den underliggande tillgången, eftersom terminspriset bestäms av dagens pris och den riskfria räntan (se till exempel Hull (1998)).

som beskriver olika egenskaper hos fördelningarna. Fördelningens standardavvikelse är ett mått på spridningen i fördelningen.[13] En hög standardavvikelse kan tolkas som att marknaden anser att det råder stor osäkerhet om hur priset på den underliggande tillgången kan komma att utvecklas under perioden fram till lösendagen (se diagram 1). Oftast är det mer informativt att utnyttja implicita fördelningar för tillgångens avkastning än för dess pris. Detta beror på att till exempel standardavvikelsen för priset varierar i takt med att prisnivån förändras, vilket försvårar jämförelser mellan olika tidpunkter när prisnivåerna skilt sig åt. Standardavvikelsen för avkastningarna antas däremot i allmänhet inte bero på prisnivån, vilket medför att avkastningsstandardavvikelserna vid två olika tidpunkter alltid är jämförbara. Därför kommer vi i artikeln att fokusera på fördelningar för olika tillgångars avkastning, i stället för på deras prisnivå.

Ett annat moment som kan användas för att beskriva en fördelnings egenskaper är skevheten, det vill säga i vilken grad och åt vilket håll en fördelning är

Diagram 1. Normalfördelningar med hög (bred linje), respektive låg standardavvikelse (tunn linje)



[13] Standardavvikelsen för en stokastisk variabel X definieras som

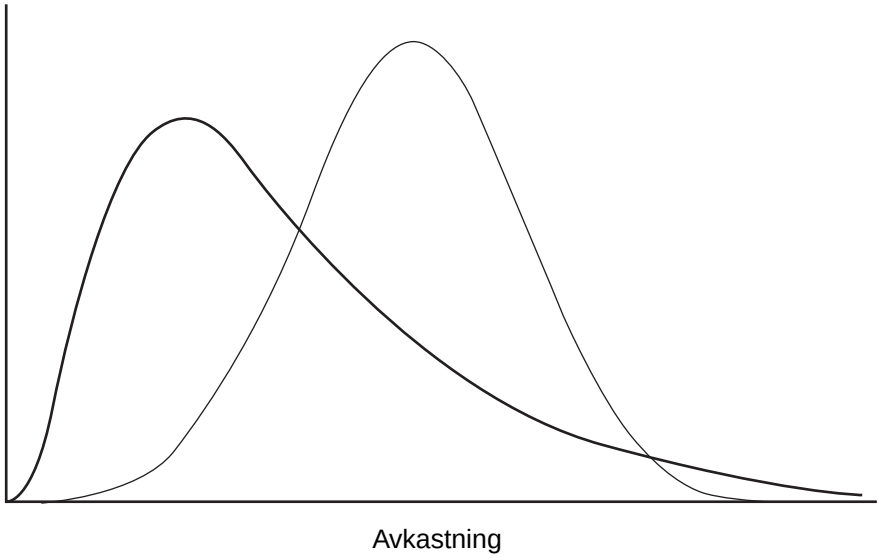
$$\sigma = \sqrt{E[(X - E[X])^2]},$$

där $E[\cdot]$ betecknar väntevärdet.

asymmetrisk.[14] Det är vanligt att man antar att fördelningen för avkastningen på en tillgång är normalfördelad (som i till exempel Black-Scholes-modellen) eller åtminstone symmetrisk, vilket medför att måttet på skevhet är lika med noll. Om den implicita fördelningen har positiv skevhet innebär detta att en större del av sannolikhetsmassan finns i fördelningens högra svans än i den vänstra (se diagram 2). Detta kan tolkas som att marknaden uppfattar att sannolikheten för positiva avkastningar är större än för negativa utfall. På motsvarande sätt kan negativ skevhet tolkas som att sannolikheten för negativa avkastningar är större än för positiva värden. Med hjälp av fördelningens skevhet kan man därför bilda sig en uppfattning om huruvida marknaden anser att osäkerheten i till exempel en valuta eller en aktie är störst på uppåtsidan eller på nedåtsidan.

Med hjälp av fördelningens skevhet kan man bilda sig en uppfattning om huruvida marknaden anser att osäkerheten i till exempel en valuta är störst på uppåtsidan eller på nedåtsidan.

Diagram 2. Symmetrisk fördelning (tunn linje) och fördelning med positiv skevhet (bred linje)



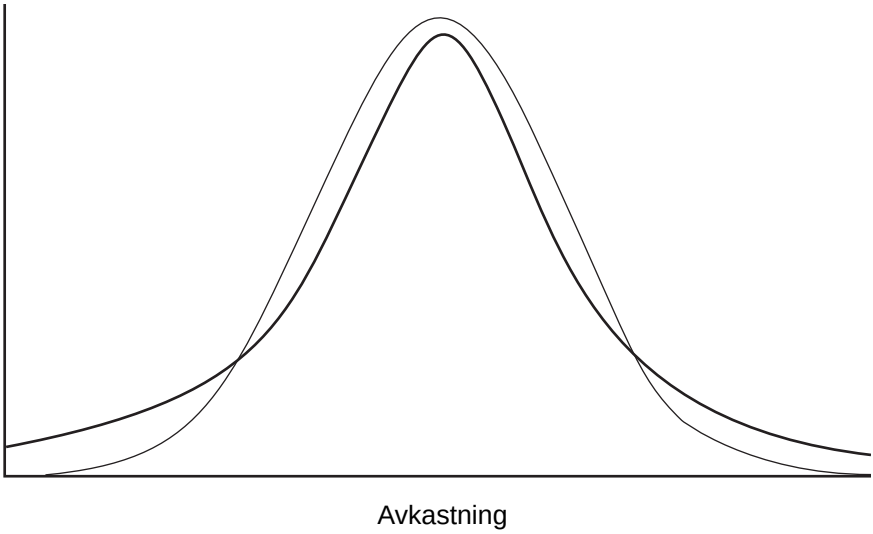
[14] Ett vanligt mått på skevhet är det tredje standardiserade centralmomentet, som definieras enligt

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - E[X])^3}{\sigma^3},$$

där σ är standardavvikelsen.

Ett annat användbart mått är kurtosis, som mäter hur toppig en fördelning är och hur tjocka fördelningens svansar är.[15] För en normalfördelning är graden av kurtosis noll, medan ett positivt värde indikerar att fördelningen är toppigare och har tjockare svansar (se diagram 3). Positiv kurtosis betyder således att sannolikheten för extrema utfall, positiva eller negativa, är stor i relation till normalfördelningen. Måttet på kurtosis kan därför ge en fingervisning om marknadens uppfattning om risken eller möjligheten att en stor prisförändring (oavsett riktning) kan komma att ske i den underliggande tillgången. Empiriska studier av finansiella tillgångar visar att fördelningsavkastningen ofta har positiv kurtosis, se till exempel Campbell med flera (1997) och Fama (1976).

Diagram 3. Normalfördelning (tunn linje) och fördelning med positiv kurtosis (bred linje)



Exempel på implicita fördelningar

I detta avsnitt presenterar vi exempel på skattade implicita fördelningar och diskuterar olika tolkningar av informationsinnehållet i fördelningarna. Vi inleder med att studera några fördelningar för räntor och aktieindex. I brist på op-

[15] Graden av kurtosis mäts i allmänhet med det fjärde standardiserade centralmomentet, som definieras enligt

$$\gamma_2 = \frac{E[(X - E[X])^4]}{\sigma^4} - 3 .$$

Att värdet 3 subtraheras från ovanstående uttryck beror på att en normalfördelning har ”icke-standardiserad” kurtosis 3.

tionsdata för svenska räntor väljer vi att illustrera metoden och tolkningarna med den italienska tremånadersräntan.[16] För att åskådliggöra resultaten för aktieindex använder vi optioner med det svenska OMX-indexet som underliggande tillgång. För båda dessa två underliggande tillgångar har en mix av lognormalfördelningar använts för att skatta den implicita sannolikhetsfördelningen. Vi avslutar avsnittet med några exempel på implicita fördelningar med valutor som underliggande tillgång. För att skatta dessa har vi använt Malz (1997) metod.

Fakta: Optionsmarknader

Optioner handlas via börs, men även via interbank, på den så kallade ”over-the-counter” (OTC)-marknaden. Börshandlade optioner noteras för standardiserade lösenpriser och förfallodagar, exempelvis med förfall i mars, juni, september och december. OTC-optioner handlas direkt mellan banker och har icke-standardiserade löptider. Det innebär att det på OTC-marknaden varje dag går att handla en option med exempelvis en månads löptid. En fördel med OTC-handlade optioner är just det faktum att instrumenten kan ”skräddarsys” för att passa kundens önskemål. Det är framför allt valuta- och ränteoptioner som handlas aktivt på OTC-marknaden. När det gäller valutaoptioner sker bara en bråkdel av världshandeln via börs. För just denna optionstyp förefaller det bättre att använda OTC-kvoteringar i empiriska studier, eftersom handeln torde vara mer likvid. På OTC-marknaden handlas dessutom fler valutapar. Valutaoptioner utställda på mindre valutor, såsom den svenska kronan, handlas över huvud taget inte via börs.

En fördel med OTC-handlade optioner är att noteringarna görs direkt i termer av volatilitet.

Ännu en fördel med OTC-handlade optioner är att noteringarna görs direkt i termer av volatilitet. Enligt en marknadsöverenskommelse sätts den kvoterade volatiliteten in i Black-Scholes formel för att få fram optionspriset. Att marknadsaktörerna använder Black-Scholes modell innebär inte nödvändigtvis att de tror att Black-Scholes modell håller.[17] Modellen används helt enkelt för att omvandla kvoteringar i implicit volatilitet till optionspriser och tvärtom. En fördel med att kvotera priserna i termer av volatilitet, i stället för i kronor och ören, är att den implicita volatiliteten inte nödvändigtvis behöver förändras i takt med att priset på den underliggande tillgången förändras, medan optionspriset är direkt beroende av förändringar i denna variabel. Marknadsaktörer som kontinuerligt åtar sig att köpa eller sälja optioner behöver därför inte ständigt uppdatera sina kvoteringar i takt med att det underliggande priset förändras.

[16] På både OM och OTC-marknaden förekommer det handel med optioner på svenska korta räntor, men det handlas inte tillräckligt många lösenpriser för att möjliggöra skattning av implicita fördelningar för svenska korträntor. Riksbanken utnyttjar för närvarande en annan metod för att skatta räntefördelningar som bygger på priser på obligationer och statsskuldväxlar i stället för på optionspriser (se Sveriges riksbanks Inflationsrapport 3/1998, sid 15–16).

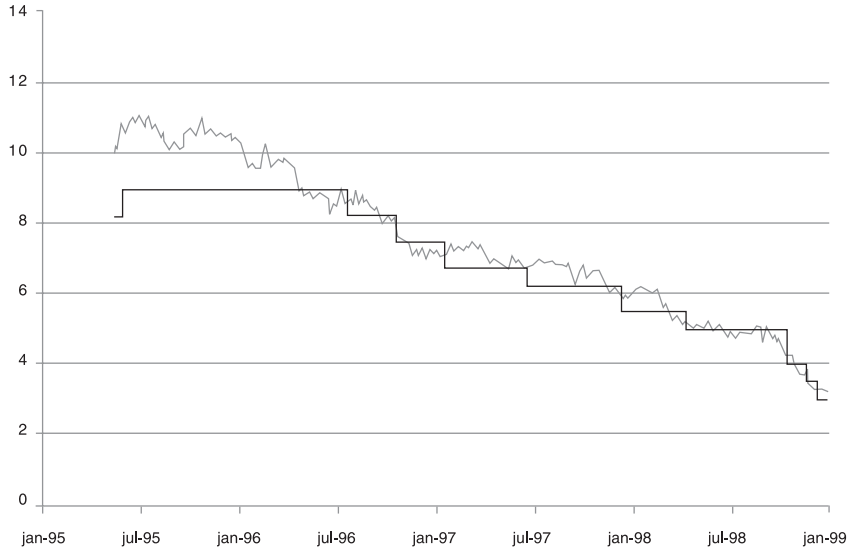
[17] Det är till exempel fullt tänkbart att en del aktörer värderar en option med en helt annan teoretisk värderingsmodell, som exempelvis tar hänsyn till stokastisk volatilitet. Därefter används detta framräknade pris som input i Black-Scholes formel för att lösa ut den implicita Black-Scholes-volatiliteten. Detta värde noteras på datorskärmarna som det ”pris” till vilket man är beredd att köpa eller sälja optionen. Den summa som faktiskt betalas om en affär görs med en motpart räknas slutligen fram genom att substituera in den noterade volatiliteten i Black-Scholes formel, och lösa för priset.

Fördelningar för räntor

The London International Financial Futures and Options Exchange (LIFFE) fungerar som marknadsplats för optioner och terminer, med bland annat olika euro-räntor som underliggande tillgång.[18] Räntan på eurolira-kontrakt med tre månaders löptid är en av de tillgångar som LIFFE använder som underliggande tillgång.[19] Diagram 4 visar tremånadersräntan på eurolira-kontraktet sedan den 16 maj 1995, då LIFFE introducerade optioner på detta kontrakt, samt den italienska styrräntan under samma period. Diagrammet visar att tremånadersräntan följt styrräntan mycket nära sedan början av 1996. Man kan också se att detta inte enbart beror på att eurolira-räntan anpassats till nya styrräntenivåer utan också på att den ofta till stor del lyckats förutspå kommande förändringar av styrräntan.

Den italienska tremånadersräntan tycks alltså ha gett en fingervisning om nivån på den framtida styrräntan. Man får emellertid inte någon uppfattning om marknadens bedömning av osäkerheten om den framtida räntan, eller om risken

Diagram 4. Tremånaders eurolira-ränta och den italienska styrräntan. Procent per år



[18] En euro-ränta är räntan på en så kallad *deposit*, det vill säga ett standardiserat avtal för lån utan säkerhet mellan banker. LIFFE noterar tyvärr inga derivatkontrakt med svenska räntor som underliggande tillgång.

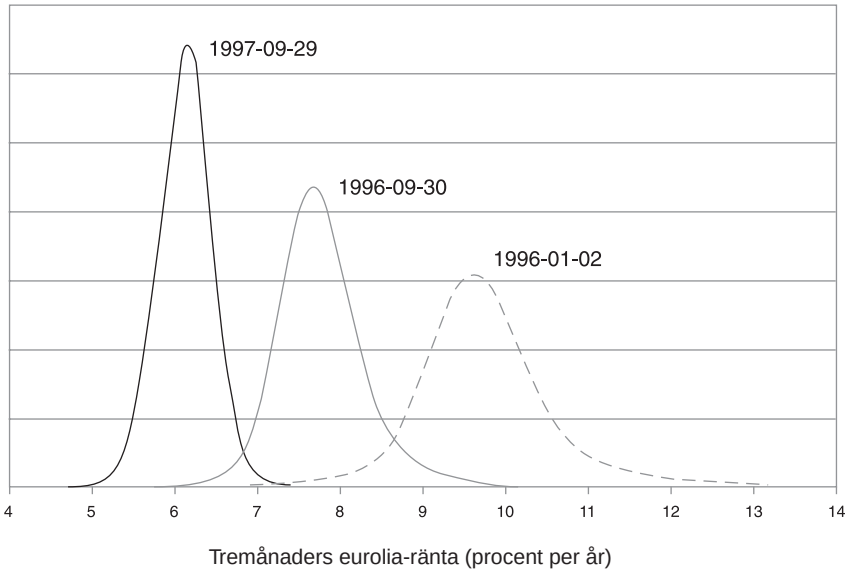
[19] Egentligen är det ett terminskontrakt på tremånadersräntan som är den underliggande tillgången. Detta saknar dock betydelse för tolkningen av de implicita fördelningarna.

i huvudsak upplevs ligga på uppåtsidan eller på nedåtsidan. Den typen av information kan man däremot utläsa ur implicita sannolikhetsfördelningar.

Diagram 5 visar de skattade implicita fördelningarna för tremånaders eurolira-räntan vid tre olika tillfällen: den 2 januari 1996, den 30 september 1996 och den 29 september 1997. I samtliga tre fall var optionernas återstående löptid 77 dagar. De skattade implicita fördelningarna kan därför tolkas som marknadens bedömning av sannolikhetsfördelningen för den italienska tremånadersräntan 77 dagar framåt i tiden, vid respektive datum. De tre datum vi valt som exempel spänner över en intressant period under vilken marknadens intresse koncentrerades till Italiens ansträngningar att kvalificera sig för medlemskap i EMU. I takt med att ett medlemskap framstod som allt mer sannolikt sjönk räntorna kraftigt, vilket framgår av diagram 4.

Det tydligaste mönstret i diagram 5 är att i takt med att räntenivån har fallit har också variansen i fördelningarna minskat. Med andra ord har osäkerheten om den framtida räntenivån minskat över tiden. Detta framgår också av tabell 1, som visar de skattade fyra första momenten i fördelningarna. Med hjälp av tabellen är det också lättare att se hur de högre momenten ändrats över tiden. Liksom variansen har graden av kurtosis minskat drastiskt, vilket kan tolkas som att risken för extrema utfall har blivit mindre i takt med att räntan har fallit.

Diagram 5. Implicita fördelningar för tremånaders eurolira-ränta, 77 dagar framåt från respektive datum



Tabell 1. Skattade moment för implicita eurolira-fördelningar vid tre olika tillfällen

	1996-01-02	1996-09-30	1997-09-29
Medelvärde (% per år)	9,73	7,72	6,08
Standardavvikelse	0,86	0,54	0,33
Skevhet	0,88	0,68	–0,10
Kurtosis	3,20	1,92	0,18

Även skevheten i fördelningarna har förändrats. De båda fördelningarna för 1996 har positiv skevhet, vilket kan ses som att marknaden ansåg att risken i ränteprognoserna till stor del låg på uppåtsidan. Det kan finnas en mängd olika förklaringar till detta, inklusive farhågor för att den italienska regeringen skulle tvingas överge konvergensprogrammet för den ekonomiska politiken. I mitten av september 1997 hölls ett informellt ECOFIN-möte, där bland annat de blivande EMU-valutornas konverteringskurser diskuterades. Kommentarerna efter mötet tolkades av marknaden som att Italien i princip var klart för medlemskap i EMU. Diagram 5 och tabell 1 visar hur den implicita fördelningen påverkades av bland annat denna händelse. Det är tydligt att inte bara standardavvikelsen och graden av kurtosis minskade kraftigt jämfört med ett år tidigare utan att även skevheten påverkades i hög grad. Till skillnad från de tidigare fördelningarna har fördelningen för den 29 september 1997 negativ skevhet. Prissättningen på optionsmarknaden vid det här tillfället tyder alltså på att man förändrat sin bedömning av risken på räntemarknaden, från att i huvudsak ha varit på uppåtsidan till att ligga på nedåtsidan. Detta förefaller naturligt om marknaden betraktade det som troligt att Italien skulle bli medlem i EMU från starten.

När den underliggande tillgången är en kort ränta är de implicita fördelningarna av stort intresse för centralbanker eftersom de kan fungera som indikatorer på marknadens uppfattning om den framtida penningpolitiken.

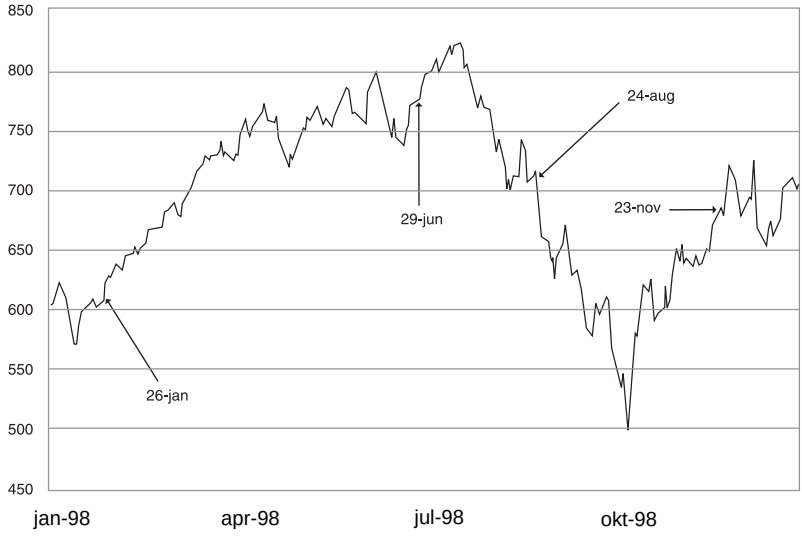
Ovanstående exempel visar att studier av implicita fördelningar kan tillföra ytterligare information om marknadens förväntningar. Framför allt gäller detta information om hur osäkert marknaden uppfattar att läget är, vilket framgår av fördelningens standardavvikelse och kurtosis. Därutöver ger skevhetsmåttet en bild av i vilken riktning marknaden upplever att den största risken finns under optionernas återstående löptid. När den underliggande tillgången är en kort ränta är de implicita fördelningarna naturligtvis av stort intresse för centralbanker, eftersom de kan fungera som indikatorer på marknadens uppfattning om den framtida penningpolitiken.

Fördelningar för aktier

En annan tillgångsmarknad, där implicita fördelningar kan fungera som en värdefull indikator, är aktiemarknaden. Derivatinstrument på enskilda aktier eller aktieindex handlas i de flesta länder som standardiserade kontrakt via börs. I Sverige handlas optioner på ett antal av Stockholmsbörsens största aktier. För en centralbank är information om börsen som helhet oftast av större intresse än utvecklingen för enskilda aktier, bland annat eftersom variationer i det samlade börsvärdet kan antas påverka den ekonomiska utvecklingen. OM fungerar som marknadsplats för standardiserade optioner och terminer med OMX-index som underliggande tillgång. OMX är ett värdeviktat index, bestående av de 30 mest omsatta aktierna på Stockholmsbörsen, och bör därför fungera som en god indikator för den svenska börsen som helhet.[20]

1998 var ett händelserikt börsår. Mellan den 1 januari och den 20 juli ökade OMX-index med 31,7 procent, för att därefter falla tillbaka kraftigt i samband med att den finansiella krisen i Ryssland bröt ut. Under hösten raderades hela uppgången ut, och då botten nåddes den 8 oktober hade OMX-index tappat ytterligare 18,5 procent av sitt värde, jämfört med vid årets början. Under årets sista månader återhämtade sig börsen igen, och facit för hela året 1998 blev en uppgång med 15,6 procent. Diagram 6 illustrerar förloppet grafiskt.

Diagram 6. OMX-index utveckling under 1998

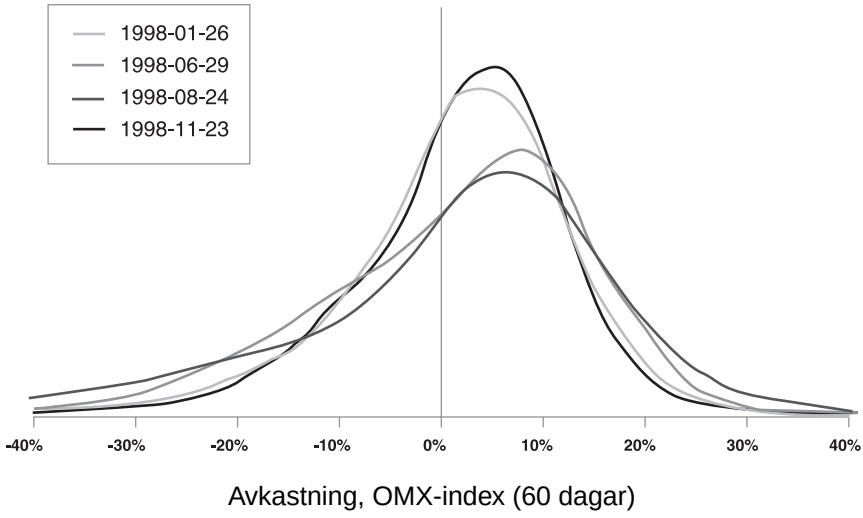


[20] Aktierna i OMX-index omfattar för närvarande (december 1998) ca 67 procent av det samlade börsvärdet på Stockholmsbörsen.

Genom att studera den implicita fördelningen för OMX-index vid olika tidpunkter under 1998 bör man kunna utvinna information om hur marknadens förväntningar beträffande den framtida börsutvecklingen såg ut vid dessa tillfällen. Vi har valt ut fyra dagar under 1998 (markerade i diagram 6) och skattat de implicita fördelningarna för dessa dagar: den 26 januari, den 29 juni, den 24 augusti och den 23 november. Vid samtliga dessa tidpunkter fanns det OMX-optioner med en återstående löptid på 60 dagar noterade, och det är dessa optioner som använts vid beräkningen av de implicita sannolikhetsfördelningarna. De fyra dagar som valts ut inträffade, i tur och ordning, i början av en längre börsuppgång, strax före toppen, efter en tids kraftig börsnedgång respektive efter en stark återhämtning.

Diagram 7 visar de skattade implicita fördelningarna vid de fyra tillfällena. Av diagrammet framgår tydligt att alla fyra fördelningarna har negativ skevhet. Detta kan bero på att marknaden uppfattade att risken i huvudsak låg på nedåtsidan, men en annan trolig förklaring är att optionspriserna influeras av ett försäkringsbeteende hos investerarna. Aktörer med positioner på aktiemarknaden efterfrågar ”out-of-the-money” säljoptioner för att gardera sig mot stora nedgångar.[21]

Diagram 7. Implicita fördelningar för OMX-index



[21] En köpoption (säljoption) sägs vara ”out-of-the-money” då optionens lösenpris är högre (lägre) än priset på den underliggande tillgången. Om det omvända förhållandet gäller är optionen ”in-the-money”, medan man säger att optionen är ”at-the-money” om priset på den underliggande tillgången är lika med lösenpriset.

Den stora efterfrågan kan då komma att driva upp priset på dessa optioner, vilket återspeglas i form av en implicit fördelning med negativ skevhet.[22]

Det finns också viktiga skillnader mellan de fyra skattade fördelningarna. Om man till exempel jämför fördelningen i januari med den i juni ser man att vänstersvansen i junifördelningen är längre och tjockare. Dessutom är det tydligt att junifördelningens varians är högre än januarifördelningens. Detta tyder på att marknaden i slutet av juni (då börsen hade stigit med mer än 25 procent) började bli allt mer orolig för ett börsras. Den 24 augusti hade OMX-index fallit med cirka 15 procent sedan toppen i juli, vilket medförde ökad oro för ytterligare stora kursnedgångar. Detta avspeglas i den implicita fördelningen för detta datum, där man ser att spridningen i fördelningen ökat jämfört med junifördelningen, samtidigt som den negativa skevheten ökat ytterligare. Enligt prissättningen på optionsmarknaden förväntade sig således marknadsaktörerna fler stora kursrörelser under de kommande 60 dagarna, och man bedömde att risken till största delen låg på nedåtsidan.

OMX-index nådde slutligen sitt lägsta värde för året den 8 oktober och vände därefter uppåt. Den 23 november hade OMX stigit med cirka 32 procent sedan den lägsta punkten, och marknadens bedömning av den framtida börsutvecklingen hade också förändrats. Den implicita fördelningen den 23 november är nästan identisk med januarifördelningen, vilket tyder på en kraftigt dämpad oro för nya börsras. I efterhand kan man också konstatera att utvecklingen i OMX-index under den efterföljande 60-dagarsperioden varit förhållandevis stabil.

Fördelningar för valutor

För en centralbank är växelkursutvecklingen av stor vikt, eftersom den ingår som en viktig variabel i bland annat prognosarbetet. Trots att Sverige har en helt flytande växelkurs och penningpolitiken syftar till att uppnå prisstabilitet är kronutvecklingen och marknadens förväntningar beträffande denna av stort intresse för Riksbanken.

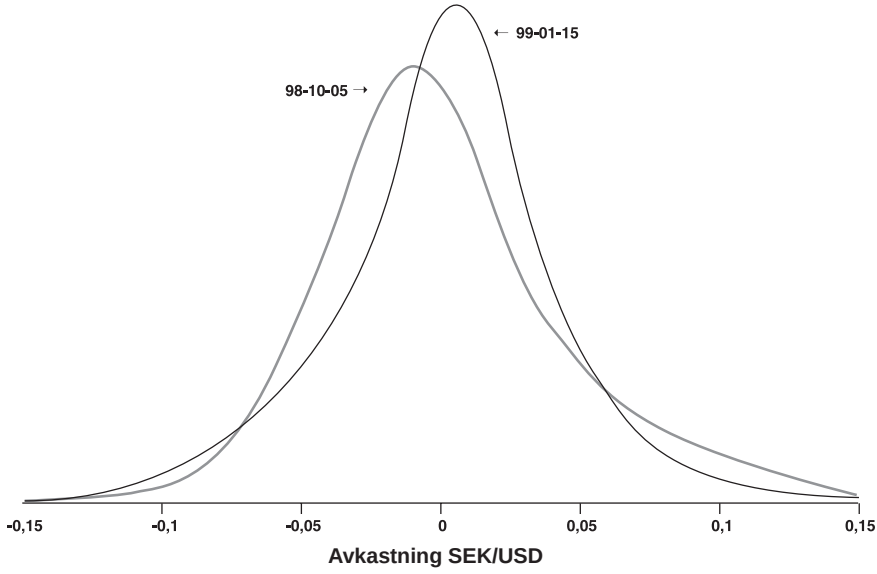
Trots att Sverige har en helt flytande växelkurs och penningpolitiken syftar till att uppnå prisstabilitet är kronutvecklingen och marknadens förväntningar beträffande denna av stort intresse för Riksbanken.

[22] På en perfekt marknad ska optionspriser (även för "out-of-the-money" säljoptioner) endast bestämmas av arbitragesamband och inte av utbud och efterfrågan. Institutionella imperfektioner, (till exempel transaktionskostnader, icke-kontinuerlig handel, med mera), kan emellertid göra att arbitragerelationerna inte håller exakt. En annan tänkbar anledning till att optioner inte prissätts strikt utifrån arbitrageprincipen är om optionernas kassaflöden inte kan replikeras av en dynamisk handelsstrategi. Detta är i allmänhet fallet om processen för den underliggande tillgången har stokastisk volatilitet eller om den innehåller diskreta hopp, se exempelvis Bates (1991) för en diskussion kring detta.

Valutaoptioner för den svenska kronan handlas enbart på OTC-marknaden. Tyvärr sparas endast ett fåtal prisnoteringar löpande och vi har bara tillgång till noteringar för tre lösenpriser för optioner med en månads löptid.[23] På grund av databristen använder vi Malz (1997) metod för att skatta de implicita sannolikhetsfördelningarna för växelkurser.[24] Vi börjar med att illustrera hur fördelningarna för växelkursen kan tolkas, genom att studera den implicita sannolikhetsfördelningen härledd från optionspriser med en månads löptid för SEK/USD vid två tillfällen. Diagram 8 visar den implicita sannolikhetsfördelningen för SEK/USD den 5 oktober 1998 respektive den 15 januari 1999.

Under hösten 1998 försvagades kronan relativt kraftigt. Det är tänkbart att kronförsvagningen var en följd av börskrisen och den globala finansoron som ledde till ett ”flight to quality”-beteende på världens marknader. Vid sådana tillfällen tenderar kronan att försvagas mot de större valutorna, som anses vara säkrare placeringar i orostider. Diagram 8 visar att den implicita sannolikhetsfördelningen för den 5 oktober 1998 har positiv skevhet, det vill säga det finns mer massa i den högra svansen än i den vänstra. Detta kan tolkas som att marknadsaktörerna trodde att det fanns en högre sannolikhet för att den svenska kronan skulle fortsätta att försvagas än att den skulle förstärkas under den efterföljande månaden.[25]

Diagram 8. Implicita sannolikhetsfördelningar för SEK/USD,1998-10-05 och 1999-01-15



[23] För övriga löptider har vi bara tillgång till kvoteringar på ”at-the-money”-optioner.
[24] Se appendix 2 för en beskrivning av metoden.
[25] En positiv avkastning innebär en högre växelkurs, det vill säga en svagare krona.

Den implicita sannolikhetsfördelningen för den 15 januari 1999 har däremot negativ skevhet, vilket indikerar att marknadsaktörerna tycktes tro att risken var större för att den svenska kronan skulle apprecieras mot dollarn under den närmaste månaden, än för att den skulle deprecieras. I början av 1999 förstärktes kronan mot dollarn, och det är tydligt att marknadsaktörerna även ändrade sin riskbedömning till kronans fördel.

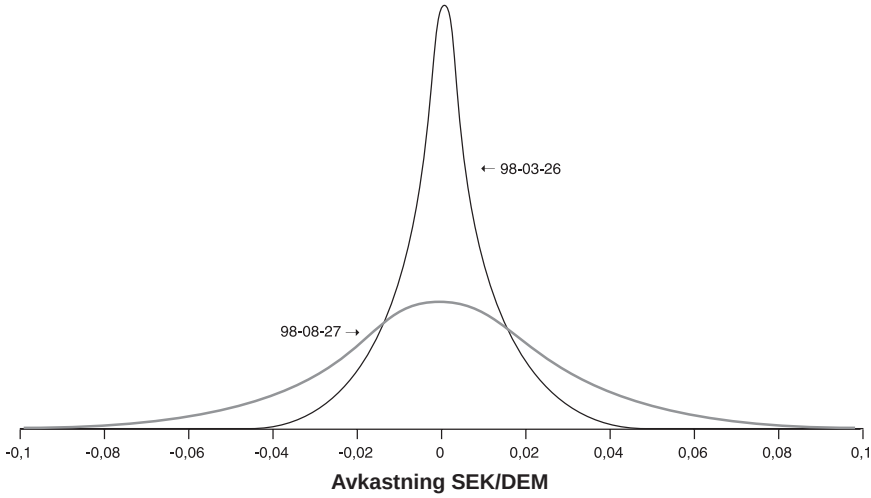
Tabell 2. Skattade moment för SEK/USD-fördelningen 1998-10-05 samt 1999-01-15

Moment	1998-10-05	1999-01-15
Standardavvikelse	0,15	0,14
Skevhet	0,36	–0,34
Kurtosis	0,43	0,60

Tabell 2 visar momenten för de skattade implicita sannolikhetsfördelningarna. Av tabellen framgår också tydligt att skevheten skiftade tecken från positivt i oktober 1998 till negativt i januari 1999. Graden av kurtosis var positiv vid båda tillfällena, vilket kan tolkas som att marknadsaktörerna bedömde att sannolikheten för stora rörelser på valutamarknaden var relativt stor, i både oktober 1998 och januari 1999. Trots omsvängningen i bedömningen av riktningen på risken var den förväntade standardavvikelsen i det närmaste identisk vid båda tillfällena.

Ett annat intressant exempel är hur marknadens bedömning av SEK/DEM-kursen förändrades under 1998. Diagram 9 visar de skattade fördelningarna för SEK/DEM härledda från optionspriser med en månads löptid den 26 mars 1998 respektive den 27 augusti samma år. Vid det första skattningstillfället hade kronan stärkts under en tid, och den skattade fördelningen visar att marknaden vid det tillfället uppfattade osäkerheten som relativt låg. Detta framgår av att standardavvikelsen i fördelningen för den 26 mars är låg, det vill säga fördelningen är ”hoptryckt”. Den skattade implicita fördelningen för den 27 augusti 1998 har däremot väsentligt högre standardavvikelse, vilket resulterar i en fördelning som är mycket mer ”utspridd”. Vid det här tillfället var oron stor på de finansiella marknaderna i samband med att Ryssland drabbades av svårigheter att återbetala sina lån. Den svenska kronan försvagades kraftigt, eftersom investerare flyttade sina tillgångar till större valutor. Naturligt nog uppfattade marknaden den framtida utvecklingen vid det här tillfället som mycket osäker, vilket också framgår tydligt av den implicita fördelningen i diagram 9.

Diagram 9. Implicita sannolikhetsfördelningar för SEK/DEM 1998-03-26 samt 1998-08-27



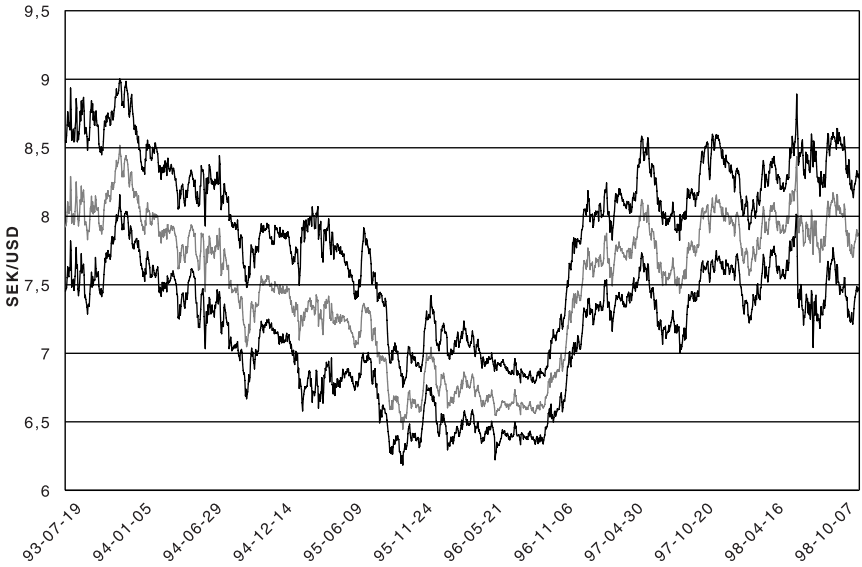
De skattade implicita fördelningarna visar en ögonblicksbild av marknadens förväntningar vid en specifik tidpunkt. Det kan också vara intressant att studera hur marknadens bedömning av osäkerheten har varierat över tiden. Detta kan man göra genom att exempelvis titta på den implicita sannolikhetsfördelningens medelvärde[26] i förhållande till ett konfidensintervall. Intervallet väljs så att en bestämd andel av sannolikhetsfördelningens massa, till exempel 90 procent, ligger mellan intervallets gränser. Detta kan tolkas som att marknaden bedömer att växelkursen vid prognosperiodens slut med 90 procents sannolikhet kommer att hamna inom detta intervall. Intervallet ger därmed en fingervisning om osäkerheten på valutamarknaden över tiden. När intervallet är brett har osäkerheten om den framtida växelkursen varit stor på marknaden. När intervallet däremot är smalt har marknaden varit relativt säker på växelkursutvecklingen.

Under turbulenta perioder på valuta- och finansmarknaderna visar prissättningen på optionsmarknaden att osäkerheten beträffande framtiden ökar.

Diagram 10 visar det skattade medelvärdet (terminsväxelkursen) för SEK/USD på en månads sikt samt det 90-procentiga konfidensintervallet för perioden 1993-07-19–1999-02-10. Diagrammet visar tydligt att osäkerheten på valutamarknaden varierar över tiden. Under turbulenta perioder på valuta- och finansmarknaderna visar prissättningen på optionsmarknaden att osäkerheten beträffande framtiden ökar.

[26] Som vi tidigare nämnt är medelvärdet alltid lika med terminskursen, eftersom de implicita fördelningarna är riskneutrala.

Diagram 10. Skattat medelvärde, samt 90 procents konfidensintervall för SEK/USD, 1993-07-19–1999-02-10. En månads prognoshorisont



Särskilt tydligt är detta mönster under den så kallade ”Tequila-krisen” i slutet av 1994 och början av 1995. Av diagrammet framgår också att osäkerheten bedömdes vara relativt stor under senare delen av 1997, då Asienkrisen inträffade, samt under Rysslandskrisen sensommaren och hösten 1998.

Slutligen kan det vara värt att notera att de skattade resultaten, liksom i all empirisk analys, är beroende av kvaliteten på indata. Som vi tidigare nämnt är antalet observerade optionspriser av vikt för att resultatet ska bli tillförlitligt. Lika viktig är likviditeten på optionsmarknaden. Om handeln i till exempel vissa ”out-of-the-money”-optioner är tunn är risken stor för att man i beräkningarna använder optionspriser som inte är representativa för det sanna marknadsläget, vilket kan snedvrida resultaten.[27]

Fakta: ”Strangle” och ”risk reversal”

Genom att studera vissa optionspriser som kontinuerligt kvoteras på OTC-marknaden kan man få en fingervisning om den implicita sannolikhetsfördelningens utseende, utan att behöva skatta denna. Därmed kan man också snabbt bilda sig en uppfattning om marknadens förväntningar. På OTC-marknaden för valutaoptioner är det vanligt med kombinationer av en ”out-of-the-money” köpoption och en ”out-of-the-money” säljoption. Två så-

[27] Se Bahra (1997) för en mer ingående diskussion om de här frågorna.

dana mycket vanliga kombinationer kallas ”strangle” respektive ”risk reversal”. Det visar sig att det finns ett klart samband mellan priset på dessa kombinationer och den implicita sannolikhetsfördelningens utseende.

Om man köper en ”strangle” köper man både ”out-of-the-money” köp- och säljoptionen. Innehavaren av en ”strangle” tror på kraftiga prisrörelser under optionernas löptid, eftersom priset på den underliggande tillgången antingen måste stiga kraftigt för att köpoptionen ska kunna lösas in eller falla kraftigt för att säljoptionen ska lösas in. Riktningen på växelkursutvecklingen är med andra ord oväsentlig, så länge växelkursen rör sig kraftigt åt något håll. Rent logiskt bör detta betyda att man är beredd att betala mer för en ”strangle”, ju högre man bedömer att sannolikheten är för extrema växelkursrörelser. Med andra ord ger priset på en ”strangle” en indikation på marknadens bedömning av graden av kurtosis i den underliggande fördelningen.

En ”risk reversal” är ett byte av en ”out-of-the-money” köpoption mot en ”out-of-the-money” säljoption.[28] Aktörerna involverade i en ”risk reversal” har en stark tro på riktningen i den underliggande växelkursen. En investerare som köper en ”risk reversal” tror att det är mer sannolikt att köpoptionen kommer att hamna ”in-the-money” än att säljoptionen kommer att göra det. Med andra ord tror investeraren att sannolikheten för positiva avkastningar i den underliggande växelkursen är större än för negativa avkastningar, det vill säga han bedömer att sannolikhetsfördelningen är positivt skev. Ett positivt pris på en ”risk reversal” innebär att ”out-of-the-money”-köpoptionen värderas högre än ”out-of-the-money”-säljoptionen av marknaden som helhet, vilket ger vid handen att den implicita fördelningen har positiv skevhet. Priset på en ”risk reversal” ger därför en indikation på marknadens uppfattning om riktningen på osäkerheten.

Sammanfattning

För såväl marknadsaktörer som centralbanker är det viktigt att försöka bilda sig en uppfattning om marknadens förväntningar beträffande den framtida utvecklingen för olika realekonomiska och finansiella variabler. Det finns ett stort antal prognosverktyg och modeller som används för att prognostisera nivån på exempelvis finansiella priser. Eftersom resultatet oftast blir ett punktestimat av det förväntade framtida värdet kan det vara svårt att uppskatta hur stor osäkerheten är i prognosen. Dessutom kan marknaden bedöma att risken inte är symmetrisk omkring det förväntade värdet. Inte heller denna egenskap fångas upp av vanliga prognosmodeller.

I den här artikeln har vi beskrivit hur optionspriser kan användas för att ta fram marknadens skattning av hela sannolikhetsfördelningen för framtida priser på olika tillgångar. Med hjälp av dessa implicita sannolikhetsfördelningar kan man på ett enkelt sätt åskådliggöra marknadens bedömning av osäkerheten om

[28] En ”risk reversal” kvoteras som volatilitetsskillnaden mellan ”out-of-the-money”-köpoptionen och ”out-of-the-money”-säljoptionen.

den framtida utvecklingen. I artikeln har vi illustrerat användbarheten av denna indikator för olika typer av tillgångspriser. De exempel vi presenterat visar att marknadens bedömning av risken för en viss tillgång kan variera avsevärt över tiden. Dessutom förekommer det betydande asymmetrier i marknadens uppfattning om den framtida sannolikhetsfördelningen. En intressant fråga för framtida studier är om och hur dessa egenskaper i de implicita fördelningarna påverkar den förväntade avkastningen på den underliggande tillgången, exempelvis i form av olika riskpremier.

Appendix 1: Skattning av implicita fördelningar med en mix av lognormalfördelningar[29]

I allmänhet kan priset på en europeisk option beräknas med hjälp av så kallad *riskneutral värdering*. Enligt den här ansatsen kan optionspriset uttryckas som nuvärdet av optionens förväntade framtida kassaflöde, där väntevärdet beräknas utifrån den *riskneutrala sannolikhetsfördelningen*.[30] Vid tidpunkten t kan till exempel priset på en europeisk köpoption, c, med förfallodatum T och lösenpris X, som är utfärdad på en underliggande tillgång S, skrivas som

$$c = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} q(S_T)(S_T - X)\,dS_T \tag{1}$$

där $e^{-r(T-t)}$ är diskonteringsfaktorn som baseras på den riskfria räntan r och $q(S_T)$ betecknar den riskneutrala täthetsfunktionen för den underliggande tillgångens pris på förfallodagen. Motsvarande gäller för en europeisk säljoption:

$$p = e^{-r(T-t)} \int_0^{X} q(S_T)(X - S_T)\,dS_T \tag{2}$$

Det är nu lätt att se att man genom att utnyttja observerade optionspriser borde kunna lösa ut marknadens skattning av sannolikhetsfördelningen $q(S_T)$ med hjälp av ovanstående två uttryck.

Antag att en blandning av två lognormalfördelningar är lämplig för att beskriva den underliggande fördelningen för S_T:

[29] Se Melick och Thomas (1997) för fler detaljer om metoden. Se även Söderlind och Svensson (1997).
[30] Ibland säger man i stället att man tar väntevärdet under det riskjusterade sannolikhetsmåttet, eller *martingalmåttet*.

$$q(S_T) = \theta L(\alpha_1, \beta_1, S_T) + (1-\theta) L(\alpha_2, \beta_2, S_T) \tag{3}$$

$$L(\alpha_i, \beta_i, S_T) = \frac{1}{S_T \beta_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln S_T - \alpha_i)^2}{2\beta_i^2}\right), i = 1, 2 \tag{4}$$

där α_i och β_i är läges- och spridningsparametrar för respektive lognormalfördelning, som bestämmer fördelningarnas medelvärde och varians enligt:

$$\mu_i = \exp\left(\alpha_i + \frac{\beta_i^2}{2}\right) \tag{5}$$

$$\sigma_i^2 = \exp(2\alpha_i + \beta_i^2)(\exp(\beta_i^2) - 1) \tag{6}$$

Parametern θ är den vikt som bestämmer det relativa inflytandet från respektive lognormalfördelning.

Med hjälp av minst fem simultana köp- och säljoptionsnoteringar med samma löptid men med olika lösenpriser kan de nödvändiga parametrarna $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta\}$ skattas genom att minimera summan av kvadratavvikelser mellan observerade priser, c_j^*, p_j^* och motsvarande teoretiska priser, c_j, p_j:[31]

$$\min_{\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta\}} \sum_{j=1}^{m} (c_j - c_j^*)^2 + \sum_{j=1}^{n} (p_j - p_j^*)^2 \tag{7}$$

Som Bahra (1997) föreslår kan ytterligare information utnyttjas genom att inkludera terminspriset som en extra observation i minimeringsproblemet. Vid avsaknad av arbitragemöjligheter ska terminspriset vara lika med medelvärdet för den riskneutrala fördelningen $q(S_T)$:

$$F(t, T) = \theta \exp\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{2}\right) + (1-\theta) \exp\left(\alpha_2 + \frac{\beta_2^2}{2}\right) \tag{8}$$

Kvadraten av skillnaden mellan höger- och vänsterledet i (8) adderas därför till minimeringsproblemet (7).

[31] De options- och terminsdata som har använts i artikeln består av medelvärden av köp- och säljnoteringar för respektive instrument. Vanligtvis finns det vid varje tidpunkt 20–30 OMX-optioner noterade med olika lösenpris men med samma löptid. Antalet Eurolira-optioner är vanligtvis något lägre.

I praktiken förenklas minimeringsproblemet avsevärt genom att det finns analytiska uttryck för optionspriserna i (1) och (2). OMX-indexoptioner prissätts vanligen med Blacks (1976) optionsvärderingsformel, som använder terminen med motsvarande löptid som underliggande tillgång, eftersom indexoptioner oftast hedgas med hjälp av terminen i stället för de underliggande aktierna.

Diagram 11 visar ett exempel på den skattade implicita fördelningen för OMX-index med de två viktade lognormalfördelningarna som tillsammans bildar den implicita fördelningen.

Diagram 12 och 13 visar, slutligen, att den skattade implicita fördelningen lyckas väl med att prissätta köp-, respektive säljoptionerna. Detta framgår av att skillnaderna mellan de teoretiska priserna (heldragen kurva) och de observerade marknadspriserna (punkter) är små.

Diagram 11. Implicit fördelning för OMX-index den 28 augusti 1998, enligt optionsnoteringar per den 9 juni 1998, samt de två komponenter som bildar den implicita fördelningen

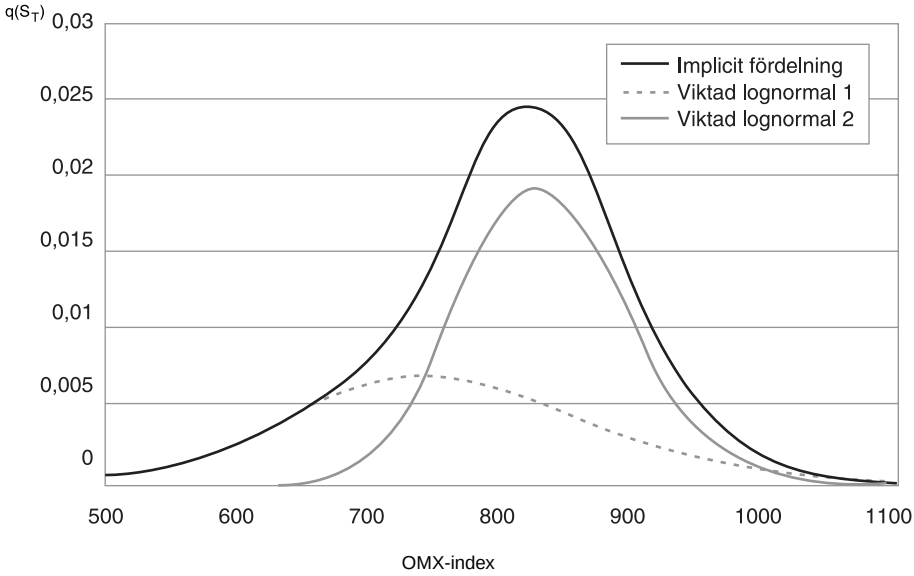


Diagram 12. Teoretiska och observerade priser för köpoptioner med förfall i augusti, enligt optionsnoteringar den 9 juni 1998

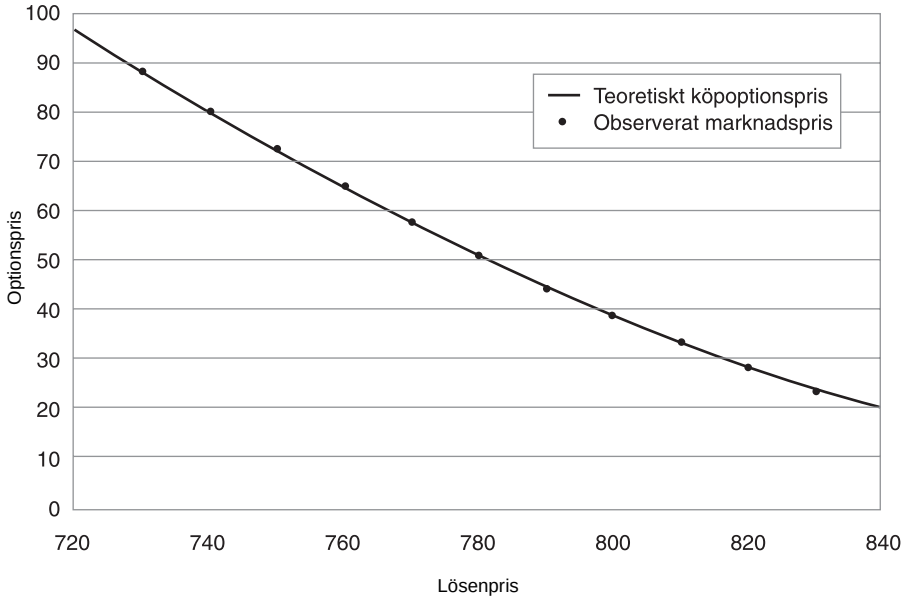
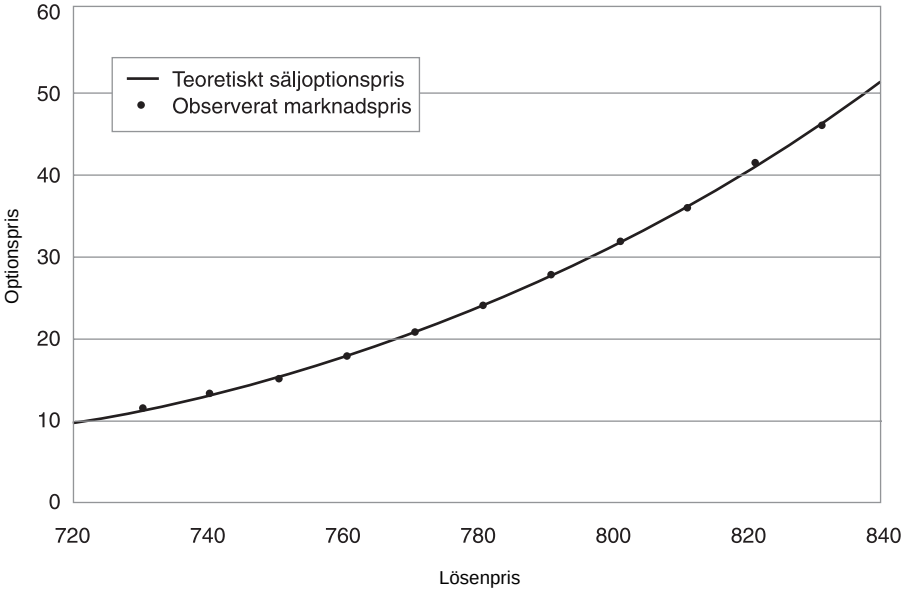


Diagram 13. Teoretiska och observerade priser för säljoptioner med förfall i augusti, enligt optionsnoteringar den 9 juni 1998



Appendix 2: Skattning av implicita växelkursfördelningar

Som tidigare nämnts kvoteras på OTC-marknaden för valutaoptioner priser för ”at-the-money”-optioner samt kombinationerna ”strangle” och ”risk reversal”. Genom att utnyttja Malz (1997) metod kan man med hjälp av dessa tre priser härleda den implicita sannolikhetsfördelningen för en given växelkurs. Detta appendix ger en kortfattad beskrivning av metoden; för fler detaljer hänvisas till Malz (1997) originalartikel.

Enligt Black-Scholes (1973) kan priset på en köpoption vid tidpunkten t uttryckas på följande sätt:[32]

$$c = e^{-r(T-t)}\left\{F_T\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{F_T}{X}\right)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right]-X\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{F_T}{X}\right)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right]\right\} \qquad (1)$$

där T betecknar optionens förfallodatum, r är den inhemska räntan, F är terminsväxelkursen, X är lösenpriset och där $\Phi[\cdot]$ betecknar den standardiserade kumulativa normalfördelningen. Förändringstakten i optionspriset med avseende på förändringar i växelkursen, S, kallas för optionens deltavärde och kan uttryckas på följande sätt:

$$\delta_c = \frac{\partial c(\cdot)}{\partial S_t} = e^{(r-r^*)(T-t)}\frac{\partial c(\cdot)}{\partial F_T} = e^{-r^*(T-t)}\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{F_T}{X}\right)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right]. \qquad (2)$$

Deltavärdet, som ligger mellan 0 och 1 för köpoptioner, mäter således graden av ”moneyness”, det vill säga hur pass djup ”in”- eller ”out-of-the-money”-optionen är.

På marknaden kvoteras ”at-the-money”-optioner (som har $\delta = 0{,}5$) direkt i termer av den implicita volatiliteten (*atm*). En ”*s*trangle” (*str*) kvoteras som skillnaden mellan ”out-of-the-money”-optionernas (med $\delta = 0{,}25$) genomsnittsvolatilitet och ”at-the-money”-volatiliteten. En ”risk reversal” (*rr*) kvoteras som skillnaden mellan volatiliteten för ”out-of-the-money”-köp- respektive -säljoptionen.

[32] Detta uttryck erhålls ur den vanliga Black-Scholes1973) / Garman-Kohlhagen (1983)-formeln genom att substituera in terminsväxelkursen ,$F_T = S_t e^{(r-r^*)(T-t)}$, där r^* betecknar den utländska räntan och S är priset på den underliggande tillgången.

Valutaoptioner har den egenskapen att en köpoption på till exempel SEK/USD med ett visst lösenpris är detsamma som en säljoption på USD/SEK med (inversen av) samma lösenpris. Detta medför att den implicita volatiliteten för en 0,25-delta säljoption måste vara densamma som den implicita volatiliteten för en 0,75-delta köpoption. Av detta följer att en ”strangle” kan uttryckas på följande sätt:

$$\text{str} = 0.5(\sigma^{0,75\delta} + \sigma^{0,25\delta}) - \text{atm} \tag{3}$$

eftersom en ”strangle” noteras på detta sätt på marknaden. På motsvarande sätt kan noteringen för en ”risk reversal” uttryckas som

$$rr = \sigma^{0,25\delta} - \sigma^{0,75\delta} \tag{4}$$

Ett så kallat ”volatilitetssmile” kan därefter tas fram genom att anpassa marknadspriserna till följande funktion:

$$\sigma(\delta, atm, rr, str) = a_0 \cdot atm - a_1 \cdot rr(\delta - 0,5) + a_2 str(\delta - 0,5)^2 \tag{7}$$

Med denna enkla funktion kommer *atm* att ange volatilitetssmilets generella nivå, medan smilets skevhet bestäms av värdet på *rr*, och kurvaturen bestäms av värdet på *str*. Parametrarna kan lösas ut enkelt, genom att se till att de observerade noteringarna för *atm, rr* och *str* alltid ligger på smilefunktionen (7). För ”at-the-money”-volatiliteten kan man utnyttja att $\delta = 0{,}5$, vilket leder till att a_0 kan sättas till 1, eftersom

$$atm = a_0 \cdot atm - a_1 \cdot rr(0,5 - 0,5) + a_2 str(0,5 - 0,5)^2 \tag{8}$$

På samma sätt kan man sätta $a_1 = 2$, eftersom

$$rr = \sigma^{0,25\delta} - \sigma^{0,75\delta} = \sigma(0,25; atm, rr, str) - \sigma(0,75; atm, rr, str) = a1 \cdot rr(0,5) \tag{9}$$

Slutligen kan man sätta $a_2 = 16$, eftersom

$$\begin{aligned} str &= \frac{\sigma^{0,25\delta} + \sigma^{0,75\delta}}{2} - atm \\ &= \frac{\sigma(0,25; atm, rr, str) + \sigma(0,75; atm, rr, str)}{2} - atm \\ &= 0,25^2 a_2 \cdot str \end{aligned} \tag{10}$$

Funktionen för volatilitetssmilet kan därmed uttryckas på följande sätt:

$$\sigma(\delta, atm, rr, str) = atm - 2rr(\delta - 0,5) + 16str(\delta - 0,5)^2 \tag{11}$$

Om man substituerar in funktionen för delta (2) i funktionen för volatilitetssmilet (11), får man följande implicita funktion:

$$\sigma = atm - 2rr\left\{e^{-r^*(T-t)}\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{F_T}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] - 0,50\right\} + 16str\left\{e^{-r^*(T-t)}\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{F_T}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] - (0,50)\right\}^2 \tag{12}$$

Slutligen substitueras ovanstående volatilitetsfunktion in i Black-Scholes formel (1), och sannolikhetsfördelningen fås fram genom att ta andraderivatan av resultatet med avseende på X och multiplicera med $e^{r(T-t)}$.[33]

[33] Detta följer av ett välkänt resultat av Breeden och Litzenberger (1978).

Referenser

Aguilar, J. (1999), ”GARCH, Implied Volatilities and Implied Distributions: An Evaluation for Forecasting Purposes”, Working Paper, Sveriges riksbank.

Bahra, B. (1997), ”Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application,” Working Paper, Bank of England.

Bates, D.S. (1991), ”The Crash of ’87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets,” *Journal of Finance*, 46, 1009–1044.

Black, F. (1976), ”The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3, 167–179.

Black, F. och M. Scholes (1973), ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637–659.

Breeden, D.T. och R.H. Litzenberger (1978), ”Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices,” *Journal of Business*, 51, 621–651.

Campbell, J.Y., A.W. Lo och A.C. MacKinlay, (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Fama, E. (1976), *Foundations of Finance*, Basic Books Inc., New York.

Galati, G. och Tsatsaronis, K. (1996), ”The Information Content of Implied Volatility from Currency Options”, Bank of International Settlements.

Garman, M.B. och S.W. Kohlhagen (1983), ”Foreign Currency Option Values,” *Journal of International Money and Finance*, 2, 231–237.

Hull, J.C.,(1998), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.

Malz, A.M. (1997), ”Option-Implied Probability Distributions and Currency Excess Returns,” Federal Reserve Bank of New York Staff Report #32.

Melick, W.R. och C.P. Thomas (1997), ”Recovering an Asset’s Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 91–115.

Rubinstein, M. (1994), ”Implied Binomial Trees,” *Journal of Finance*, 49, 771–818.

Svensson, L.E.-O. (1995), ”Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method,” Sveriges Riksbank, *Penning- & Valutapolitik*, 1995:3, 13–26.

Söderlind, P. och L. E.-O. Svensson (1997), ”New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments,” *Journal of Monetary Economics*, 40, 383–429.