

Riksbankens kommunikation av makroekonomisk osäkerhet

DAVID KJELLBERG OCH MATTIAS VILLANI

David Kjellberg är verksam på Riksbankens avdelning för penningpolitik.

Mattias Villani är verksam på Riksbankens forskningsenhet och Statistiska institutionen vid Stockholms Universitet

När prognoserna för BNP-tillväxten, inflationen och reporäntan presenteras i Sveriges riksbanks penningpolitiska rapport kompletteras de med tillhörande prognosintervall. På så sätt betonar Riksbanken att prognoser alltid är osäkra. Denna artikel beskriver i detalj hur Sveriges riksbank använder historiska prognosfel för att beräkna dessa intervall. Vi föreslår ett antal potentiella förbättringar av den nuvarande metoden, bland annat hur man kan hantera att reporäntan har en undre gräns, och hur man kan införa tidsvariation i intervallbredden som automatiskt justerar för tillfälliga förändringar i den makroekonomiska osäkerheten.

Punktprognoser och prognosintervall

Riksbanken har sedan 1995 ett inflationsmål på 2 procent. För att uppnå detta mål beslutar Riksbankens direktion regelbundet om nivån på reporäntan. Forskning har visat att penningpolitik verkar med en fördröjning på 1–2 år innan maximal effekt uppnås (Christiano et al., 2005). En effektiv penningpolitik måste därför vara framåtblickade. En central del av Riksbankens arbete består därför av att prognostisera den framtida utvecklingen av ekonomin.

I de flesta diskussioner om prognoser antas det implicit att en prognos, i någon mening, är en kvalificerad gissning om det framtida värdet på en variabel. I vissa fall kompletteras denna så kallade *punktprognos* med en uppskattning av osäkerheten i prognosen, vanligtvis presenterad som ett *prognosintervall*¹, det vill säga ett område av värden där utfallet förutsägs hamna med en i förväg given sannolikhet, till exempel 90

¹ Det är egentligen mer passande att benämna dessa intervall för osäkerhetsintervall eftersom det är det framtida utfallet som är osäkert, inte prognosen. Det är dock svårt att hitta en motsvarande terminologi för det som vanligtvis kallas prognosfördelningen (se nedan), och vi kommer därför även i fortsättningen att använda termen prognosintervall.

procent, se exempelvis Chatfield (2001, kapitel 7) för en introduktion. Figur 1 visar hur Sveriges riksbank kommunicerar sin prognos av de viktigaste makroekonomiska variablerna i *Penningpolitisk rapport* (PPR). Den heldragna linjen är den historiska utvecklingen av variabeln och den streckade fortsättningen på denna linje är Riksbankens punktprognos 1–12 kvartal framåt. De färgade ytorna illustrerar prognosintervall för de respektive prognoshorisonterna med tre olika sannolikheter: 50, 75 respektive 90 procent. De färgade ytorna brukar ibland kallas prognosband.

Mer allmänt kan man tala om *prognosfördelningen*, det vill säga en komplett sannolikhetsfördelning för det framtida värde som vi försöker att förutsäga. Vi gör en Bayesiansk tolkning av prognosfördelningen, där variabelns framtida värde är okänt vid prognostillfället och därför kan beskrivas med en (subjektiv) sannolikhetsfördelning. En Bayesian resonerar så här: Om du inte känner till värdet på en variabel (till exempel KPI-inflationen i nästkommande kvartal) eller någon annan kvantitet (till exempel en modellparameter) så bör du beskriva din okunskap i form av sannolikheter. Det spelar helt enkelt ingen roll om händelsen är slumpmässig i någon djupare mening.²

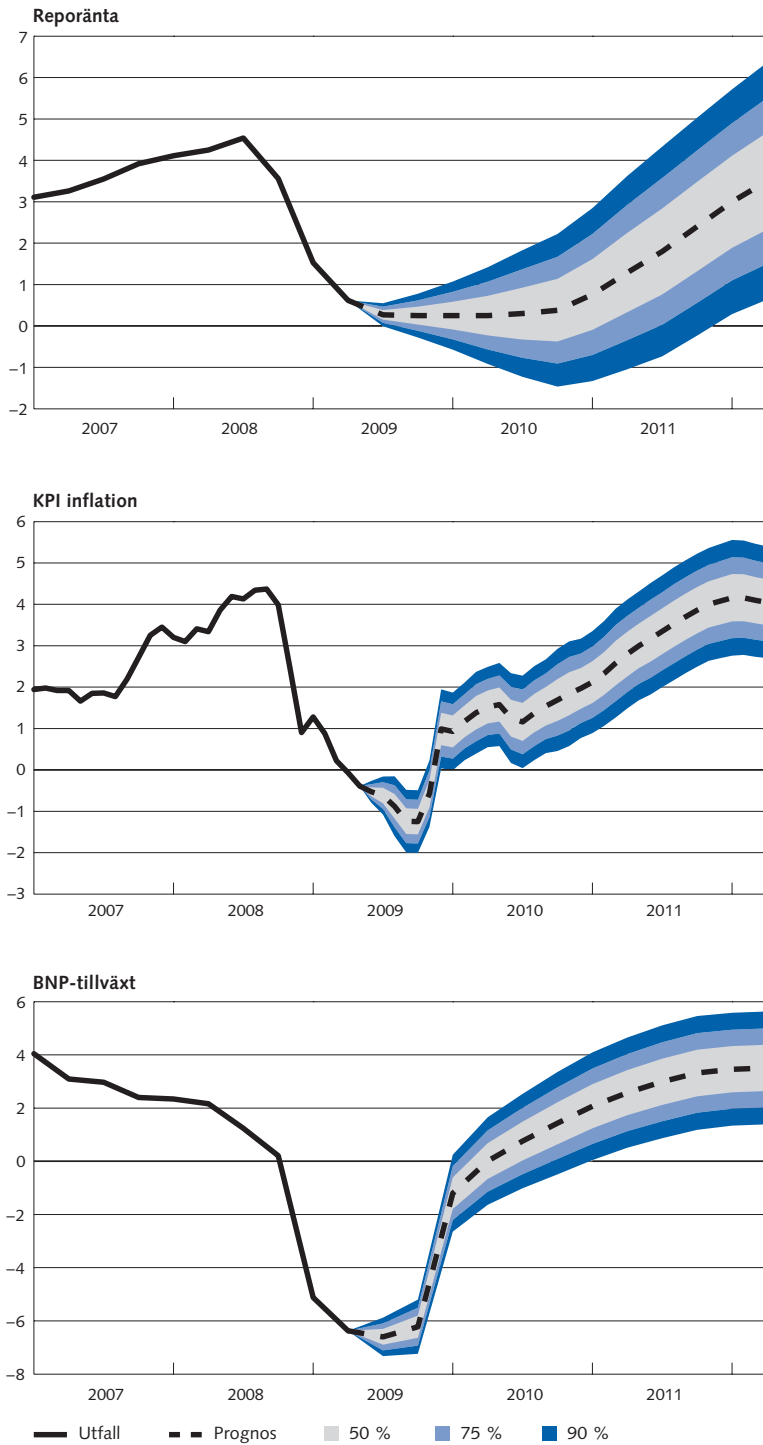
Det är naturligt att beskriva osäkerhet vid en beslutssituation (till exempel inför ett reporäntebeslut) i Bayesianska termer. Princetonprofessorn Chris Sims har uttryckt saken så här: 'Policy discussion at central banks uses the language of Bayesian decision theory' (Sims, 2002).³ Det mesta av det som vi beskriver i den här artikeln är dock tillämpbart även i en icke-Bayesiansk ansats, men vi väljer att göra en Bayesiansk tolkning av resultaten.

Det finns en viktig skillnad mellan Riksbankens punktprognoser och intervallen kring dessa prognoser. Riksbankens punktprognos för reporäntan förmedlar dess **intentioner** för penningpolitiken, det vill säga den politik som Riksbanken tänker genomföra **om** ekonomins utveckling blir så som Riksbanken idag förutspår. På liknande sätt beskriver prognosbanorna för BNP-tillväxt och KPI-inflation utvecklingen av dessa variabler givet att Riksbanken inte avviker från sin föreslagna reporäntebana. Prognosintervallen kring punktprognoserna representerar däremot **allmän** makroekonomisk osäkerhet (det vill säga inte bara Riksbankens syn på

² Den bayesianska pionjären Bruno de Finetti klassiska citat lyder: "The only relevant thing is uncertainty - the extent of our own knowledge and ignorance. The actual fact of whether or not the events considered are in some sense determined, or known by other people, and so on, is of no consequence" (De Finetti, 1975, page xi).

³ En bayesiansk ansats är inte bara att föredra rent konceptuellt utan har många andra praktiska fördelar till exempel estimering och modelljämförelse, se till exempel Bernardo och Smith (1994) för en allmän diskussion eller Adolfson et al. (2007b) från ett centralbanksperspektiv. Tre av Riksbankens viktigaste modeller, en dynamisk allmänjämviktsmodell (Adolfson et al., 2008a), en statistisk vektorautoregressiv modell (Villani, 2009) och en state-space modell med tidsvarierande parametrar (Giordani och Villani, 2009), analyseras till exempel uteslutande med bayesianska metoder.

Figur 1. Prognosfördelning i PPR, juli 2009



osäkerheten). Riksbanken vill kommunicera att framtiden är osäker och att man därmed kan komma att avvika från dagens intentioner.⁴

Syftet med denna artikel är att i detalj beskriva hur Sveriges riksbank beräknar prognosbanden i figur 1 utifrån historiska prognosfel. Vi kommer kortfattat att redogöra för alternativa tillvägagångssätt, men vår ambition är huvudsakligen att fokusera på den metod som för närvarande används på Riksbanken. Därefter beskriver vi tre potentiella förbättringar av Riksbankens prognosintervall. Det första förslaget till förbättring är en metod som gör det möjligt att införa tidsvariation i prognosintervallets bredd så att intervallen kan fånga upp mer tillfälliga förändringar i makroekonomisk osäkerhet. Det andra förslaget beskriver en enkel utvidgning av Riksbankens nuvarande metod som tar hänsyn till att reporäntan inte kan bli (alltför) negativ. Slutligen påpekar vi att prognosbanden i figur 1 är sammanbundna marginalintervall som ska utläsas prognoshorisont för prognoshorisont. Vi gör sedan en genomgång av olika sätt att konstruera prognosband som beskriver osäkerheten i hela *utfallsbanan* för en variabel.

Prognosintervall baserade på historiska prognosfel

Vi kommer i detta avsnitt att beskriva Riksbankens intervallkonstruktion som bygger på variationen i historiska prognosfel. Det finns ett antal skäl till varför denna relativt enkla idé vunnit gehör hos Sveriges riksbank:

- Att använda intervall baserade på historiska prognosprecision är ett lättbegripligt sätt att kommunicera osäkerheten i Riksbankens prognoser.
- Riksbankens punktprognos tas fram i en informell process där prognoser från strukturella ekonomiska modeller och statistiska prognosmodeller kombineras med expertbedömningar (Hallsten och Tägtström, 2009). Punktprognosen är därför väldefinierad, men kan inte beskrivas utifrån en sannolikhetsmodell. Prognosintervall baserade på historiska prognosfel är ett attraktivt alternativ när det inte finns en formell sannolikhetsmodell som genererar punktprognosen.
- Korrektheten i dessa intervall står inte och faller med en specifik modell. Intervallen speglar Riksbankens faktiska precision i prognoserna, oavsett om Riksbankens modeller är en bra beskrivning av ekonomin eller ej.

⁴ Det är dock möjligt att konstruera prognosband med intentionstolkning, se Svensson och Williams (2007) och nedan (avsnittet om simultana prognosband).

En nackdel med denna typ av intervall är dock att de är bakåtblickande och att intervallbredden är konstant över tiden⁵. Intervallen blir alltså inte automatiskt bredare i osäkra ekonomiska tider. I den här artikeln föreslår vi en metod för att införa tidsvariation i Riksbankens prognosintervall (se nedan).

PROGNOSINTERVALL FÖR BNP-TILLVÄXT OCH INFLATION

För att beräkna prognosintervallen kring prognoserna för inflation och BNP-tillväxt använder Riksbanken sina historiska prognosfel för respektive variabel. Dessa prognosintervall illustreras i figur 1. Prognosfelen definieras som en historisk prognos för ett visst kvartal minus utfallet för kvartalet. Den historiska spridningen av prognosfelen för respektive prognoshorisont mäts med *root mean squared error* (RMSE)

$$\text{RMSE}(h) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=T}^{T+n-1} (y_{t+h} - y_t^{(h)})^2},$$

där $y_t^{(h)}$ är h-stepsprognosen vid tidpunkt t , y_{t+h} är det realiserade utfallet och n är antalet utvärderade prognostillfällen.

Riksbanken gör prognoser för åtminstone 12 kvartal framåt och för varje specifik prognoshorisont beräknas spridningen av Riksbankens historiska prognosfel, vilket ger tolv olika RMSE-värden. RMSE-värdena för KPI-inflationen och BNP-tillväxten som ligger till grund för figur 1 redovisas i tabell 1.^{6 7}

TABELL 1. OLIKA PROGNOSHORISONTERS RMSE FÖR RIKSBANKENS PROGNOSE FÖR KPI-INFLATION OCH BNP-TILLVÄXT 2000–2007.

	1 kv	2 kv	3 kv	4 kv	5 kv	6 kv	7 kv	8 kv	9 kv	10 kv	11 kv	12 kv
KPI-inflation	0,30	0,50	0,60	0,65	0,73	0,78	0,81	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
BNP-tillväxt	0,44	0,62	0,88	1,00	1,08	1,17	1,23	1,27	1,30	1,30	1,30	1,30

Prognosintervallen beräknas utifrån antagandet att de framtida prognosfelen följer en normalfördelning⁸ med väntevärde noll och samma standardavvikelse som de historiska prognosfelens RMSE. För att illustrera osäkerheten i prognosen så som i figur 1 centreras fördelningen av prognosfelen för varje prognoshorisont runt respektive punktprognos från Riksbanken.

⁵ Detta är en sanning med modifikation eftersom de historiska prognosfelen kontinuerligt uppdateras med nya utfall.

⁶ Prognosen för KPI-inflationen är på månadsfrekvens. Här har vi endast redovisat RMSE för prognoshorisonterna +2, +5, +8, o.s.v. månader framåt.

⁷ RMSE-estimaterna vid långa prognoshorisonter är mycket osäkra. RMSE för prognoshorisonterna 9–12 kvartal har därför approximerats med standardavvikelsen i de historiska utfallen för KPI-inflation och BNP-tillväxt.

⁸ Ett alternativ är den så kallade t -fördelningen som har tyngre svansar vilket kan vara mer realistiskt om man observerat ett fåtal stora prognosfel.

Exempelvis beräknas ett prognosintervall med sannolikheten $(1-\alpha)$ enligt följande ekvation

$$y_t^{(h)} \pm z_{\alpha/2} \times \text{RMSE}(h), \quad h = 1, \dots, H, \quad (1)$$

där $y_t^{(h)}$ är Riksbankens punktprognos av variabeln y_{t+h} vid tidpunkt t , $z_{\alpha/2}$ är $\alpha/2$ percentilen i normalfördelningen med väntevärdet 0 och standardavvikelsen 1. $z_{\alpha/2}$ är alltså det värde som i en standardiserad normalfördelning har sannolikhetsmassa $\alpha/2$ till vänster om punkten $z_{\alpha/2}$. För ett 90-procentigt intervall har vi alltså $\alpha = 0,1$ och $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = -1.645$. RMSE-beräkningarna uppdateras ungefär en gång per år och var för PPR juli 2009 baserade på prognosfel för perioden 2000 till 2007.

PROGNOSINTERVALL FÖR REPORÄNTEPROGNOSEN

Sedan februari 2007 publicerar Riksbanken även en reporänteprognos och sedan dess har 16 prognosbanor presenterats. Även prognosen för reporäntan presenteras med ett prognosintervall, se figur 1. Den period som Riksbanken gjort prognoser för reporäntan är dock för kort för att man ska kunna göra tillförlitliga RMSE-beräkningar av spridningen i Riksbankens egna prognosfel för reporäntan.⁹ För att få överensstämmelse med beräkningen av prognosintervallen för inflation och BNP vore det naturligtvis bäst att använda Riksbankens egna prognoser för reporäntan, men tills vidare måste Riksbanken använda en alternativ metod för att beräkna spridningen av prognosfel för reporänteprognoser. Genom att använda marknadsräntornas implicita prognos för framtida kortfristiga räntor (se nästa avsnitt) kan vi approximera Riksbankens prognosförmåga under antagandet att marknadsaktörernas och Riksbankens historiska prognosprecision är likvärdig.¹⁰

Problemet med att ha för få observationer av prognosfel kommer att försvinna i takt med att fler prognosfel kan avläsas. Riksbanken kan inom en snar framtid börja inkludera sina egna prognosfel från reporänteprognosen för att beräkna RMSE, speciellt för de kortare prognoshorisonerna. Under en lång övergångsperiod kan prognosfel från både marknads-

⁹ Riksbankens första prognos för reporäntan gjordes i februari 2007 och sträcker sig till första kvartalet 2010. Eftersom kvartalsmedelvärdet för reporäntan under första kvartalet 2010 inte är känt ännu går det exempelvis inte att beräkna något prognosfel för den längsta prognoshorisonen ännu. Det kommer således att ta lång tid innan de längre prognoshorisonerna har tillräckligt många utfall att jämföra prognoserna mot så att man kan få en uppfattning om hur stor spridningen i prognosfelen är.

¹⁰ På kort sikt borde dock Riksbanken ha en fördel när det gäller prognosen för reporäntan, det vill säga prognososäkerheten bör vara mindre för Riksbanken än för marknadsaktörerna. Detta talar för att prognosintervallen för de kortaste prognoshorisonerna bör baseras på Riksbankens egen prognosprecision så snart det finns ett tillräckligt datamaterial för detta.

prissättningens prognos och Riksbankens prognos användas tillsammans för att mäta den historiska prognosprecisionen för reporäntan.

Den akademiska litteraturen föreslår en alternativ och mer framåtblickande metod för att estimerar osäkerheten för kortfristiga räntor som går ut på att använda så kallade ränteoptioner på olika sätt (se exempelvis Svensson och Söderlind (1997) samt Aguilar och Hördahl (1999)). Efter som marknadspriset på optioner avspeglar marknadsaktörernas behov av att försäkra sig mot stora svängningar i ränterelaterade värdepapper ger det också en bild av den förväntade osäkerheten under optionskontraktets giltighetstid. Utifrån ränteoptioners prissättning kan man därför beräkna en implicit sannolikhetsfördelning för exempelvis en kortfristig ränta vid en bestämd tidpunkt. Denna sannolikhetsfördelning kan sedan användas för att beräkna och illustrera prognosintervall. Tyvärr är den svenska marknaden för den typen av räntederivat relativt liten, vilket innebär att tillräckliga mängder tillförlitliga prisdata saknas.

MARKNADSRÄNTORNAS IMPLICITA PROGNOSE

Enligt teorin om effektiva räntemarknader och den så kallade förväntningshypotesen ska exempelvis en marknadsränta från en obligation med löptiden två år avspegla den förväntade avkastningen från att placera pengarna till dagslåneräntan dag till dag i två år. Avkastningskurvan, som visar hur räntorna skiljer sig åt för olika löptider vid ett givet ögonblick, kan därför ge information om hur marknadsaktörer tror att reporäntan ska utvecklas framöver. Genom att beräkna så kallade implicita terminräntor får man marknadsaktörernas genomsnittliga prognos för kortfristiga räntor. De förväntningar som är inbakade i terminräntorna kan enligt förväntningshypotesen tolkas som marknadsaktörernas samlade medelvärdesprognos för räntans framtida nivå, givet att aktörerna har rationella förväntningar.¹¹ Det betyder att marknadsräntor reflekterar den matematiska förväntan av marknads samlade prognosfördelning, efter att man exkluderat risk- och löptidspremier. Det är dessa förväntningar som används som approximation istället för Riksbankens egna reporänteprognoser, eftersom det därmed finns möjlighet att studera prognosfel långt tillbaka i tiden.

Det finns dock en viktig nackdel förknippad med att använda terminräntor som prognos på reporäntan. Både akademiker och marknadsaktörer har noterat att marknadsräntorna inte enbart baseras på den

¹¹ Det samlade medelvärdet kommer därmed att vara en volymviktning av de enskilda aktörernas förväntade utfall av korträntan, utifrån hur mycket pengar de investerar i att räntan ska bli högre eller lägre. Om de största placeringarna på räntemarknaden bygger på tron att räntan kommer att stiga framöver så kommer terminräntorna också att indikera högre räntor. Det här innebär att de värdemässigt största aktörernas medelvärdesprognoser väger tyngre än de från aktörer med mindre investeringsportföljer.

förväntade utvecklingen för reporäntan, vilket betyder att förväntningshypotesen inte ger hela svaret på hur en marknadsränta prissätts, se till exempel Campbell och Shiller (1991) och Alsterlind och Dillén (2005). Det som har noterats är att räntorna, utöver den förväntade dagslåneräntan, även inkluderar en kompensation till investerarna för eventuella risker och kostnader förknippade med att binda upp sin utlåning på längre löptider. Den här formen av kompensation brukar kallas för risk- och löptidspremier.

Om terminsräntorna till viss del avviker från förväntningshypotesen bör räntorna justeras för de olika premier som orsakar avvikelser. Premierna innehåller ingen information om vad marknadens aktörer förväntar sig om dagslåneräntan och ska därför exkluderas från terminsräntorna för att man ska få fram marknadsaktörernas implicita prognos för dagslåneräntan. Tyvärr är det problematiskt att beräkna storleken på dessa premier. Vi kan observera en marknadsränta för en viss löptid, exempelvis en statsobligationsränta, men vi kan inte på ett enkelt sätt avgöra hur mycket av marknadsräntan som avspeglar förväntad genomsnittlig dagslåneränta och hur mycket som är någon form av premie.

För att identifiera prognosfelen hos terminsräntorna har Riksbanken tidigare valt ett enkelt antagande om att premierna för en specifik prognoshorisont kan estimeras som det genomsnittliga prognosfelet för de ojusterade terminsräntorna med motsvarande löptid, se fördjupningsruta i PPR 2007:1. Om exempelvis terminsräntorna för fyra kvartal framåt i tiden i genomsnitt överstiger det realiserade utfallet av reporäntan med 0,30 procentenheter under utvärderingsperioden, exkluderas 0,30 procentenheter från alla terminsräntor med löptid på fyra kvartal. När terminsräntorna justerats på det här sättet är det tänkt att de bättre ska spegla marknadsaktörernas prognos för reporäntan. Avvikelserna mellan de medelvärdesjusterade terminsräntorna och reporänteutfallen under tidsperioden 1998 till 2005 är de prognosfel som Riksbanken använde för att beräkna prognosintervall för sina reporänteprognoser fram till september 2008.¹²

Att anta att premierna i terminsräntorna är lika med hela det genomsnittliga prognosfelet har inget starkt teoretiskt stöd. Om räntemarknadens aktörer har rationella förväntningar skulle man vänta sig att det genomsnittliga prognosfelet var noll, vilket då förvisso skulle betyda att ett genomsnitt skilt från noll kan avspegla den genomsnittliga storleken på premien. Det är dock viktigt att beakta att det genomsnittliga prognosfelet kan avvika från noll även om premier inte skulle finnas. En orsak kan vara att stickprovsstorleken är så liten att den endast täcker en

¹² Metoden beskrivs översiktligt i fördjupningsrutan "Beräkningsmetod för prognosintervall" i Penningpolitisk rapport (PPR) 2007:1.

eller ett par konjunkturcykler. Det genomsnittliga prognosfelet inkluderar därför både terminspremier och konsekventa prognosfel (positiva eller negativa) under utvärderingsperioden.

I en ansats för att förbättra antagandet om terminsräntepremierna och estimeringen av dessa premier har Riksbanken använt en modell för avkastningskurvan där riskpremier kan estimeras (se Appendix för en mer utförlig beskrivning av modellen). Modellen använder svenska statsobligationsräntor i form av en estimerad avkastningskurva för nollkupongräntor. Utifrån teoretiska samband samt ränteutvecklingen från januari 1998 till februari 2008 identifierar modellen tre underliggande faktorer som drivit förändringarna i avkastningskurvan. Med hjälp av dessa tre statistiska faktorer kan modellen även identifiera genomsnittliga terminsräntepremier för olika löptider. Marknadsaktörernas prognoser för en kortfristig ränta som finns implicit i marknadsräntorna för svenska statsobligationer kan därmed estimeras genom att man exkluderar terminspremierna från terminsräntorna. Sedan oktober 2008 är det prognosprecisionen för dessa justerade terminsräntor som genererar de RMSE-värden som bestämmer prognosintervallens bredd för reporänteprognosen i figur 1. RMSE-värdena redovisas i tabell 2.

TABELL 2. OLIKA PROGNOSSHORISONTERS RMSE FÖR TERMINSRÄNTEPROGNOSE FÖR ENMÅNADSRÄNTAN JAN 2001–FEB 2008.

	1 kv	2 kv	3 kv	4 kv	5 kv	6 kv	7 kv	8 kv	9 kv	10 kv	11 kv	12 kv
Terminsräntor	0,17	0,33	0,50	0,71	0,93	1,12	1,28	1,42	1,54	1,60	1,66	1,74

ALTERNATIVA SÄTT ATT BERÄKNA PROGNOSENTERVALL

Vi har ovan redogjort för Riksbankens metod att beräkna prognosintervall utifrån historiska prognosfel. Vi ska här mycket kortfattat redogöra för två alternativa sätt att beräkna osäkerhetsintervall: prognosintervall från formella sannolikhetsmodeller, och prognosintervall framtagna genom expertbedömningar.

Givet en formell sannolikhetsmodell kan man beräkna den fullständiga prognosfördelningen för ett system av variabler, eventuellt med hjälp av simuleringsmetoder. Denna fördelning är simultan både över variabler och över prognosperioder (se nedan). Om Bayesianska metoder används för att skatta modellen kan man även ta hänsyn till parameterosäkerhet i modellen, eller till och med viss form av modellosäkerhet.

Vetenskapliga studier av prognosförmågan hos ekonomiska och statistiska modeller har oftast fokuserat på precisionen i punktprognosen. En kort sammanfattning av dessa studiers resultat är:

- I klassen av statistiska modeller är enkla modeller oftast lika bra eller bättre än mer komplicerade modeller.
- Äldre strukturella ekonomiska modeller med mikrofundament (till exempel Real Business Cycle (RBC) modellerna, se King et al., 1988) har sämre prognosförmåga än enkla statistiska modeller (Zimmermann, 2001).
- Moderna strukturella ekonomiska modeller med mikrofundament (till exempel Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) modeller, se till exempel Christiano et al., 2005) är i princip lika bra som statistiska prognosmodeller (Smets och Wouters, 2003, Adolfson et al., 2007c, Edge et al., 2008), men strukturella modeller har uppenbara fördelar eftersom de är enklare att tolka och ger större möjligheter att beräkna prognoser utifrån väldefinierade scenarier.
- Endast på de allra kortaste prognoshorisonterna ger avancerade expertbedömningar (till exempel Federal Reserves och Sveriges riksbanks inflationsprognoser) mer korrekta prognoser än statistiska och strukturella modeller (se exempelvis Sims, 2002 och Adolfson et al., 2007a).

Utvärderingar av prognosintervall och prognosfördelningar har relativt nyligen börjat ta plats i den vetenskapliga makroekonomiska litteraturen, se exempelvis Cogley et al. (2005), Adolfson et al. (2007c), Clark (2009), Jore et al. (2009) och Giordani och Villiani (2009). En viktig slutsats från dessa studier är att störningarnas variabilitet har varierat kraftigt över tiden och att makromodeller därför behöver tidsvarierande störningsvarianser om prognosintervallen faktiskt ska uppnå den sannolikhetstäckning som var avsedd (till exempel 90 procent för ett 90-procentigt intervall).

De prognosintervall som används av Bank of England är av en helt annan karaktär. Bank of England beskriver sin metod som ett 'best collective judgement', vilket ska tolkas som en konsensus av expertbedömningar. Det skulle leda för långt att i detalj diskutera modell- och expertbaserade prognosfördelningar. Vi nöjer oss här med att mycket kortfattat nämna dessa två metoders viktigaste för- och nackdelar.¹³

¹³ Se även Adolfson (2007a) för en mer utförlig diskussion och exempel på episoder i Riksbankens arbete som de olika angreppssätten hanterat på olika sätt.

- Fördelar med modellbaserade metoder:
 - Ger en begriplig tankeram och hanterar komplexa samband i ett system av endogena variabler.
 - Transparens. Det är relativt lätt att i efterhand förstå upphovet till prognosen samt att lära sig av begångna misstag.
- Nackdelar med modellbaserade metoder:
 - Formella modeller kan vara överdrivet förenklade och därmed ge missvisande resultat eller prognoser.
 - Formella modeller har svårt att ta hänsyn till nyligen inkommen information om ekonomin, speciellt när denna information har en form som är svår att passa in i modellens struktur.
 - Prognosintervall från formella modeller är ofta för snäva eftersom dessa intervall utgår från en given modell och därmed bortser från osäkerheten i modellens specifikation (Chatfield, 1993).
- Fördelar med expertbedömningar:
 - Kan beakta nyligen inkommen information i princip vilken form som helst (givet att experten kan tolka och processa informationen).
- Nackdelar med expertbedömningar:
 - Ej transparenta. Experten ger sällan så mycket information om hur han tar fram prognosen att man kan bedöma hans misstag i efterhand. Av samma skäl är det svårt att lära sig av expertens misstag.
 - Det är mycket svårt för en expert att hantera system av (endogena) variabler utan en explicit modell.
 - Experter ger ofta för snäva prognosintervall, se exempelvis Lawrence et al. (2006) som ger ett antal skäl till denna överoptimism.

Expertbedömningar är till stor del de modellbaserade metodernas direkta motpol, och mycket skulle vara vunnet om man kunde kombinera dessa två. Det är redan välkänt hur man kan kombinera olika modellbaserade metoder i prognosarbetet (exempelvis via Bayesiansk modellsammanvägningar, se Hoeting et al., 1999), och en del finns skrivet om hur man kombinerar experters bedömningar (French och Insura, 2000), men någon praktisk, explicit och rigorös metod för att kombinera modeller och expertbedömningar har ännu inte föreslagits.

Förbättringar av Riksbankens metod med historiska prognosfel

TIDSVARIERANDE BREDD PÅ PROGNOSSINTERVALLEN

En egenskap hos de RMSE-baserade intervallen är att deras bredd är oberoende av ekonomins tillstånd. Osäkerheten antas alltså vara lika stor oavsett om vi befinner oss i en låg- eller högkonjunktur, eller till och med i tider av ekonomisk kris, vilket kan ses som en nackdel. Det ska dock sägas att de mest flitigt använda ekonomiska och statistiska modellerna är linjära med konstanta parametrar och har därmed exakt samma egenskap.¹⁴

Det är i princip möjligt att generalisera metoden som bygger på historiska prognosfel så att prognosfelens varians följer en modell, exempelvis genom att tillåta prognosfelens (logaritmerade) varians vara tidsvarierande enligt en autoregressiv process eller genom att modellera prognosfelens varians som en funktion av makrovariabler. Problemet är att det finns relativt få historiska prognosfel till förfogande och estimering av dessa mer komplexa modeller är därför antagligen förknippad med alltför stor osäkerhet.

Det är ändå naturligt att fundera över om RMSE-baserade intervall kan modifieras så att intervallbredden beror på ekonomins tillstånd. En uppenbar lösning är att multiplicera RMSE-talen med en osäkerhetsfaktor som exempelvis är större än ett i perioder med extra osäkerhet. Denna faktor kan bestämmas subjektivt av beslutsfattaren utifrån hans/hennes uppfattning av den nuvarande osäkerheten i ekonomin. Riksbanken använde tidigare en metod med en liknande idé (Blix och Sellin, 1999).

En mer objektiv och transparent metod är att skatta en modell med tidsvarierande varians för tidsserien själv snarare än för prognosfelen för denna variabel. Detta ger en uppfattning om osäkerheten i den variabel man försöker att prognosticera, och denna osäkerhet kan sedan användas för att till exempel öka RMSE-talen i osäkra tider. Antag exempelvis att vi modellerar BNP-tillväxt med en AR-process där residualerna följer en stokastisk volatilitetsmodell:

$$y_t = \mu + \sum_{k=1}^K \phi_k (y_{t-k} - \mu) + \lambda_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1), \quad (2)$$

$$\ln \lambda_t^2 = \ln \lambda_{t-1}^2 + v_t,$$

där λ_t är den tidsvarierande standardavvikelsen för störningarna. Innovationerna till volatiliteten, v_t , antas vara oberoende $N(0, \psi)$ störning-

¹⁴ Även i modeller med tidsinvarianta parametrar kommer det naturligtvis att uppstå viss tidsvariation i parameterskattningarna över tiden.

ar. Det är enkelt att generalisera denna modell så att $\ln \lambda_t^2$ följer en allmän AR-process, men vi kommer här fokusera på den vanligaste modellen där $\ln \lambda_t^2$ är en slumpvandring. Man kan beräkna en Bayesiansk skattning $\hat{\lambda}_t$ av λ_t för $t=1, \dots, T$.¹⁵ Ett mått på något som skulle kunna kallas den *relativa volatiliteten* vid tidpunkt T kan nu definieras som

$$\kappa_T = \frac{\hat{\lambda}_T}{n^{-1} \prod_{t=t_1}^{t_2} \hat{\lambda}_t^{1/n}},$$

där t_1 och t_2 är start- och slutkvartalet för den tidsperiod där RMSE-talen för en-stegsprognoserna är beräknade, och $n = t_2 - t_1 + 1$ är antalet kvartal under denna period. κ_T mäter alltså volatilitet vid tidpunkten T i relation till det geometriska medelvärdet av volatiliteten under den period som använts för att beräkna RMSE.

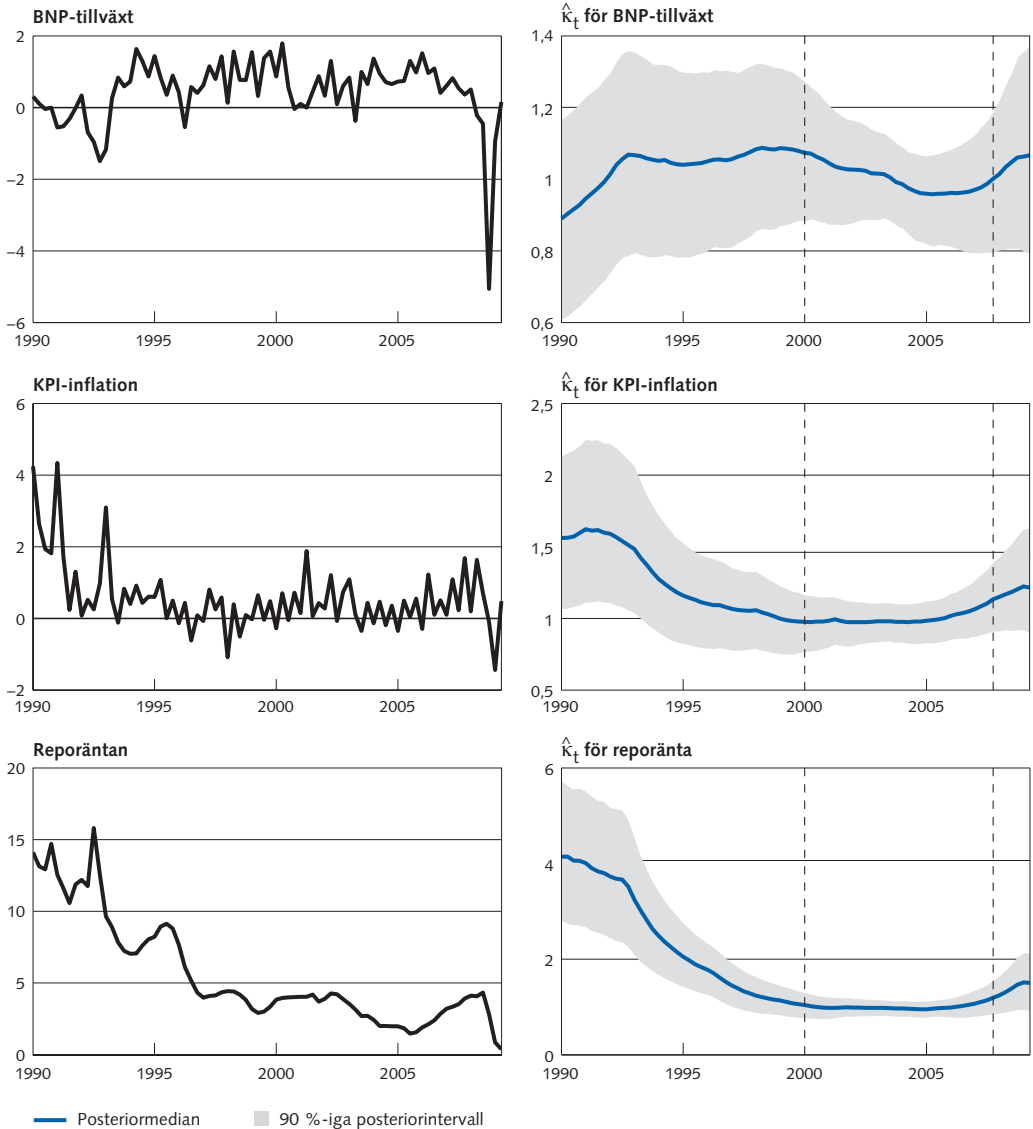
RMSE-baserade intervall kan nu beräknas enligt den metod som presenterades ovan, men med $\text{RMSE}(h)$ ersatt med $\kappa_T \cdot \text{RMSE}(h)$. Notera att RMSE-talen multipliceras med samma faktor oavsett prognoshorisont, vilket är analogt med att multiplicera störningsvariansen i en linjär modell med en konstant.

Figur 2 visar estimationsresultaten för κ_t för procentuell kvartalsförändring av säsongrensad BNP och KPI samt för reporäntan under tidsperioden andra kvartalet 1980 till andra kvartalet 2009.¹⁶ Resultaten visar att volatiliteten har varit i princip konstant för BNP-tillväxten, men varierat kraftigt för inflationen och reporäntan. Figur 1 visar ganska tydliga indikationer på att den långa period av successivt minskande volatilitet i inflation och reporäntan har brutits sedan 1–2 år tillbaka. Medianen i posteriorfördelningen för κ_{2009Q2} , den relativa volatiliteten för andra kvartalet 2009, är 1,10, 1,27 och 1,55 för BNP-tillväxten, inflationen och reporäntan. Detta innebär att RMSE-talen för exempelvis inflationen i tabell 1 bör öka med 27 procent på grund av den extra osäkerheten idag jämfört med perioden 2000–2007. Ökningen av RMSE-talen för reporäntan med 55 procent verkar vara i största laget. En anledning till de kraftiga svängningarna i volatiliteten kan vara antagandet om normalfördelade störningar i modellen i ekvation 2, vilket medför att extrema observationer (så kallade outliers) övertolkas som en drastiskt förändrad varians.

¹⁵ Med Bayesianska skattningmetoder (se till exempel Clark, 2009) kan man beräkna posteriorfördelningen för hela sekvensen $\lambda_1, \dots, \lambda_T$ baserat på data till och med period $t = T$. Det skulle leda alltför långt att ge alla detaljer om estimationen här. Priorfördelningen för de tidsinvarianta parametrarna är densamma som i Villani (2009). Den viktigaste parametern är ψ , innovationsvariansen. Vi följer här Giordani och Villani (2009) och använder en invers gammafördelning som prior för ψ med väntevärde 0,01 och 10 frihetsgrader, vilket implicerar en rimlig tidsvariation.

¹⁶ Data till och med fjärde kvartalet 1988 används som träningsobservationer för att skapa en priorfördelning för λ_0 och resterande observationer nyttjas för att skatta modellen.

Figur 2. Vänsterkolumn: Tidsserier över BNP-tillväxt, inflation och reporäntan. Högerkolumn: Posteriormedian ($\hat{\kappa}_t$) och 90 %-iga intervall för den relativa volatiliteten, κ_t . Start- och slutdatum för RMSE-samplet är markerade med vertikala streckade linjer.



Ett annat problem med modellen är att förändringar i variansen antas vara frekventa, och därmed skattas som små. Variansen i reporäntan verkar dock snarare ha varit konstant under längre perioder för att sedan förändras mer abrupt vid några enstaka tillfällen. LASER-modellen i Giordani och Villani (2009) är bättre på att hantera dessa problem, och kan vara ett intressant alternativ för denna analys. I LASER tillåts icke-normala störnin-

gar och innovationer, och modellens varianser kan vara konstanta under längre perioder för att sedan göra större hopp.

Metoden ovan ger en skalningsfaktor κ_r för varje makrovariabel. Ett alternativ är att skala alla variablers intervallbredd med en gemensam skalfaktor för ekonomin som helhet. En enkel lösning är att beräkna ett geometriskt medelvärde av de individuella skalfaktorerna. Ett mer avancerat alternativ är att skatta en vektorautoregressiv modell med tidsvarierande kovariansmatris som är tidsinvariant upp till en skalfaktor som är gemensam för alla variabler:

$$x_t = \mu + \sum_{k=1}^K \phi_k (x_{t-k} - \mu) + \lambda_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \overset{\text{ober}}{\sim} N(0, \Sigma)$$

$$\ln \lambda_t^2 = \ln \lambda_{t-1}^2 + v_t,$$

där x_t är en vektor med observationer på p tidsserier vid tidpunkt t , ε_t är en p -dimensionell vektor med störningar som har kovariansmatris Σ , och $v_t \overset{iid}{\sim} N(0, \psi)$ är innovationerna till den univariata gemensamma volatilitetsfaktorn λ_t .

PROGNOSINTERVALL SOM BEAKTAR RÄNTANS NEDRE GRÄNS

De exceptionellt låga räntenivåerna som uppstått under den finansiella krisen skapar nya problem. Hur konstruerar man prognosintervall som beaktar att reporäntan inte kan vara negativ? Det ska påpekas att det i princip är möjligt att ha en negativ reporänta (Beechey och Elmér, 2009; Söderström och Westermarck, 2009), men antagligen kan reporäntan inte ligga alltför långt under nollstrecket. Vi kommer därför att göra antagandet att den undre gränsen för reporäntan är noll, men vår metod kan enkelt generaliseras till en godtycklig undre gräns.

Vi har ovan beskrivit hur Riksbankens RMSE-baserade prognosintervall bygger på normalfördelningen, vars utfallsrum är intervallet $(-\infty, \infty)$. Dessa intervall har därför nackdelen att intervallen för reporäntan kan inkludera negativa värden. Detta medför inga problem i praktiken så länge räntan inte är mycket låg eftersom sannolikheten för negativa räntor då är i princip obefintlig. Men i tider med låga räntor blir sannolikheten för negativ reporänta substantiell och antagandet om normalfördelning blir mer problematiskt. Riksbanken har provat två sätt att tackla detta problem. Den första lösningen (använd i PPR februari 2009) består i att klippa av prognosbanden för reporäntan i figur 1 under nollan. I den efterföljande PPR juli 2009 valdes istället att behålla prognosbanden i deras ursprungliga form, det vill säga tillåta intervall som innehåller negativa värden (se figur 1). Intervall med negativa värden kan motiveras med två

komplementära resonemang: i) den nedre gränsen är inte exakt noll, måttligt negativa räntor kan inte uteslutas (Beechey och Elmér, 2009) och ii) negativa reporäntor i prognosfördelningen representerar alternativa penningpolitiska åtgärder med samma effekt som om reporäntan var negativ, men ska inte tolkas som att reporäntan faktiskt är negativ.

Vi ska här föreslå en alternativ metod i samma anda som Riksbankens nuvarande metod baserad på historiska prognosfel, men som ger en prognosfördelning där utfallsrummet är intervallet $[0, \infty)$. Det finns många fördelningsfamiljer för icke-negativa slumpvariabler. Vi kommer här fokusera på *gammafördelningen*¹⁷ vars täthetsfunktion är av formen

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} \exp(-y/\beta),$$

där $\alpha > 0$ kallas för *formparametern* (därför att den bestämmer graden av skevhet i fördelningen) och $\beta > 0$ är *skalparametern* (därför att om Y är *Gamma*(α, β) fördelad så gäller att $cY \sim \text{Gamma}(\alpha, c\beta)$, där c är en skalningskonstant). Figur 3 visar några exempel på fördelningar som ingår i gammafördelningens familj. Gammafördelningen har väntevärde $\alpha\beta$ och varians $\alpha\beta^2$. En viktig egenskap hos gammafördelningen är att den konvergerar mot normalfördelningen när $\alpha \rightarrow \infty$. Man kan också visa att gammafördelningens skevhet är $2/\sqrt{\alpha}$, och att skevheten därför är liten när väntevärdet är stort i relation till standardavvikelsen, vilket till exempel är fallet när reporäntan är nära sitt långsiktiga jämviktstillstånd. I tider med normala räntenivåer är gammafördelningen därför närapå symmetrisk. Notera även att gammafördelningen enkelt kan generaliseras till fallet med en godtycklig undre gräns. Om den undre gränsen är u så följer $y + u$ en generaliserad gammafördelning över intervallet $[u, \infty)$.

Vi ska nu beskriva hur historiska prognosfel kan användas för att skatta gammafördelningens parametrar. Riksbankens nuvarande intervallkonstruktion för en given prognoshorisont kan ses som en skattning av en normalfördelning $N(\mu_h, \sigma_h^2)$ där

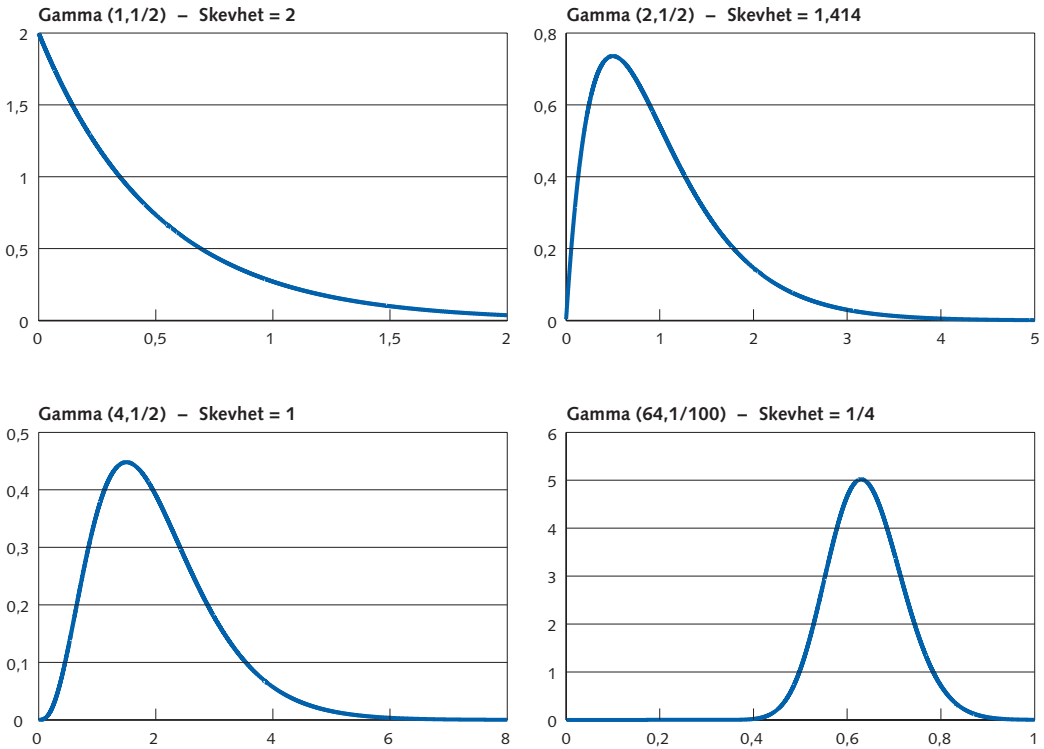
$$E_t(Y_{t+h}) = \mu_h = y_t^{(h)}$$

$$Std_t(Y_{t+h}) = \sigma_h = RMSE(h).$$

Uttryckt i ord kan man säga att Riksbanken parar ihop normalfördelningens lägesmått μ_h med punktprognosen, samtidigt som normalfördelningens standardavvikelse σ_h paras ihop med historisk RMSE.

¹⁷ Ett alternativ är en så kallad lognormalfördelning. Denna fördelning är dock mycket skev även när fördelningens massa ligger långt från noll. Det innebär att lognormalfördelningen kommer att vara avsevärt skev även när reporäntan är vid sitt jämviktstillstånd, vilket kan ses som en nackdel.

Figur 3. Några exempel på gammafördelningar



Om vi nu antar att prognosfördelningen h kvartal framåt ges av en $Gamma(\alpha_h, \beta_h)$ -fördelning, så kan dess parametrar beräknas på ett analogt sätt (se Appendix B) genom att matcha i) väntevärdet i gammafördelningen mot Riksbankens prognos och ii) standardavvikelsen i gammafördelning mot RMSE för historiska prognosfel¹⁸. I gammafallet spelar det dock roll om man ser Riksbankens reporänteprognos som ett väntevärde eller en median. I standardteorin för modern penningpolitisk analys råder så kallad säkerhetsekivalens, varför endast väntevärdesprognosen för reporäntan har betydelse för de ekonomiska agenternas beslut, övriga moment spelar ingen roll (Woodford, 2003). Detta resultat ser ut att vara lösningen på vårt problem: Riksbankens prognos är en intention och enligt resultatet om säkerhetsekivalens bör Riksbanken därför kommunicera en väntevärdesprognos. Tyvärr gäller inte säkerhetsekivalens när man tar hänsyn till att räntan har en undre gräns eftersom denna

¹⁸ Man kan ifrågasätta om spridningen i historiska prognosfel verkligen är relevant i denna nya situation med låga räntenivåer utan motstycke i historiska data. Frågan uppstår då om osäkerheten angående reporäntan är större eller mindre än normalt just nu. Räntans undre gräns talar för att osäkerheten är mindre eftersom räntan i princip inte kan bli mycket lägre, men å andra sidan kan reporäntan behöva höjas snabbare än väntat om den finansiella krisen och lågkonjunkturen blir mer kortvariga än förväntat.

restriktion gör modellen icke-linjär. Just i det fall där valet av punktprognos spelar roll (det vill säga när reporäntan är nära noll och fördelningen antagligen är skev) kan vi alltså inte luta oss mot den ekonomiska teorin på området.¹⁹ Riksbanken kommunicerar i och för sig att dess punktprognos är ett väntevärde, men Riksbankens informella process för att ta fram prognosen gör att andra typer av punktskattningar, som exempelvis en medianprognos, inte kan uteslutas, se exempelvis det penningpolitiska protokollet från direktionens sammanträde den 1 juli 2009. Ruta 1 diskuterar under vilka villkor som olika punktprognoser är optimala i ett statistiskt perspektiv.²⁰ I Appendix B ger vi detaljerade lösningar för gammamodellen i de två fallen där Riksbankens prognos är ett väntevärde respektive en median.

Ruta 1: Hur väljer man en optimal punkt- och intervallprognos?

OPTIMAL PUNKTPROGNOS

Valet mellan olika punktprognoser, som till exempel väntevärdet, median eller typvärdet, bestäms av ens förlustfunktion, det vill säga den förlust man får när man prognostiserar en variabel med värdet \hat{y} och det faktiska utfallet blir y . Det klassiska exemplet är den kvadratiske förlustfunktionen

$$L(y, \hat{y}) = (y - \hat{y})^2$$

som medför att prognosfördelningens väntevärde $E(y)$ är den optimala punktprognosen. Om förlustfunktionen istället är linjär i det absoluta prognosfelet

$$L(y, \hat{y}) = |y - \hat{y}|$$

får man att medianen är den optimala punktprognosen. Man kan tycka att typvärdet, det mest sannolika värdet, är en naturlig punktprognos, men man bör då ha i åtanke att denna prognos endast är optimal för den lite underliga allt-eller-ingenet-förlusten

$$L(y, \hat{y}) = 0 \text{ om } y = \hat{y}, \text{ men } L(y, \hat{y}) = 1 \text{ om } y \neq \hat{y},$$

det vill säga att man drabbas av samma förlust oavsett prognosfelets storlek, förutom om man ger en fullständigt exakt prognos för då är förlusten noll. Ytterligare en intressant förlustfunktion är den så kallade lin-lin förlusten där under- och överskattning hanteras asymmetriskt:

¹⁹ Säkerhetsekivalens kan dock fungera som en bra approximation och detta är värt att studera noggrannare.

²⁰ Det är viktigt att påpeka att med moderna simuleringsmetoder kan vi i princip alltid beräkna hela prognosfördelningen och det är inte uppenbart att vi faktiskt måste välja att reducera denna fördelning till ett eller flera sammanfattningsmått, som till exempel en punktprognos. En viktig anledning till varför en centralbank väljer att betona en punktprognos snarare än hela prognosfördelningen är att det förenklar kommunikationen till marknaden och allmänheten. Men när prognosfördelningen är asymmetrisk är det svårt att komma ifrån att en punktprognos ger en mycket grov och kanske till och med missvisande sammanfattning av fördelningen.

$$L(y, \hat{y}) = c_1 \text{ om } \hat{y} \leq y, \text{ men } L(y, \hat{y}) = c_2 \text{ om } \hat{y} > y,$$

där c_1 och c_2 är konstanter. I detta fall är den optimala prognosen $c_1/(c_1 + c_2)$ percentilen i prognosfördelningen. Om exempelvis förlusten vid underskattning av inflationen är dubbelt så stor som när man överskattar ($c_1 = 2c_2$) så är den 66:e (2/3) percentilen i prognosfördelningen den optimala punktprognosen.

OPTIMALT PROGNOSEINTERVALL

En lite mer fyllig sammanfattning av prognosfördelningen ges av ett sannolikhetsintervall. Även för intervall finns det mer än en typ att välja på för en given intervallsannolikhet. Det kanske vanligaste intervallet är ett som utesluter lika mycket sannolikhetsmassa nedanför den undre gränsen som ovanför den övre gränsen. Detta centrerade intervall är optimalt om förlusten är av formen (Wallis, 1989)

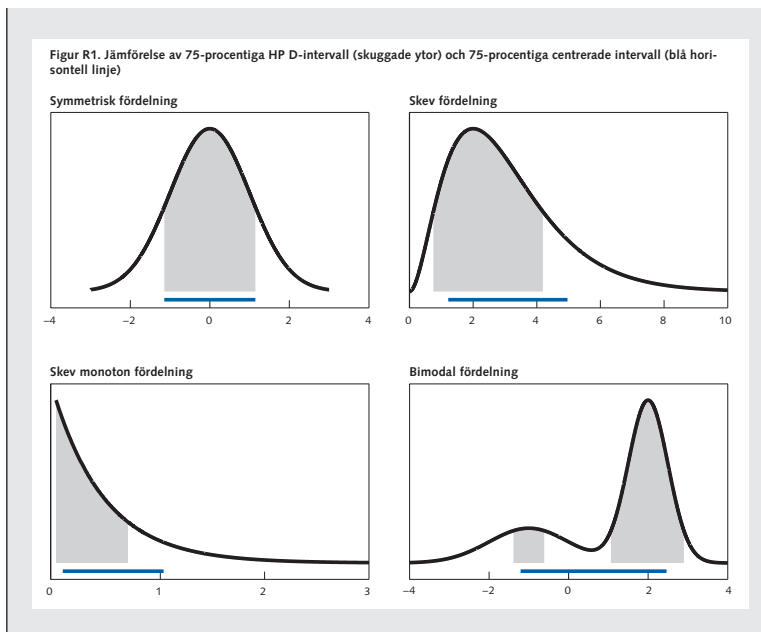
$$L(y, [a, b]) = \begin{cases} c(b-a) + d(a-y) & \text{om } y < a \\ c(b-a) & \text{om } a \leq y \leq b \\ c(b-a) + d(y-b) & \text{om } y > b \end{cases}$$

det vill säga om förlusten är linjär i avståndet mellan utfallet y och intervallet $[a, b]$. Om förlusten istället är av allt-eller-ingen-form

$$L(y, [a, b]) = \begin{cases} c(b-a) + d & \text{om } y < a \\ c(b-a) & \text{om } a \leq y \leq b \\ c(b-a) + d & \text{om } y > b \end{cases}$$

så är intervallet $[a, b]$ optimalt om ändpunkterna a and b har samma täthet i prognosfördelningen (Wallis, 1989). Detta intervall har kortast längd för en given täckningssannolikhet och inkluderar de punkter som har högst täthet, och kallas därför Highest Posterior Density (HPD) intervall.

Figur R1 illustrerar dessa två intervalltyper för några olika prognosfördelningar. Om prognosfördelningen är symmetrisk sammanfaller centrerade intervall med HPD-intervall. Detta är antagligen orsaken till att valet av prognosintervall sällan diskuteras explicit. Men för asymmetriska fördelningar spelar intervalltypen stor roll. Notera även att det centrerade intervallet kan exkludera punkter med mycket hög täthet (fördelningen nere till vänster i figur R1), samt inkludera punkter med mycket låg täthet (fördelningen nere till höger i figur R1). Exemplet med den skeva monotona fördelningen i figur R1 är speciellt relevant här eftersom detta utseende på fördelningen uppstår när man använder gammafördelningen för att modellera prognosfördelningen för reporäntan vid mycket låga räntenivåer. Figur R1 visar att 75-percentiga HPD-intervall i det här exemplet kommer att inkludera fallet med noll reporänta, men att denna punkt hamnar utanför det centrerade 75-percentiga intervallet.



Ett exempel med prognosintervall från gammamodellen visas i figur 4. Grafen längst upp till vänster i figuren replikerar Riksbankens punktprognos och prognosintervall för reporäntan från normalmodellen som publicerades i PPR juli 2009. Till höger om denna graf visas motsvarande prognosintervall för gammamodellen under antagandet att Riksbankens prognos är ett väntevärde. Lägg märke till att prognosintervallen inte innehåller negativa räntor (en konsekvens av gammafördelningen), och att intervallets undre gräns kan vara noll (en konsekvens av de så kallade Highest Posterior Density (HPD) intervall som används i figuren, se ruta 1. Den faktiska prognosfördelningens form är av den typ som illustreras i den undre vänstra delen av figur R1 när reporänteprognosen är nära noll). Den kraftiga skevheten i fördelningen (jämför exempelvis de 75- och 90-procentiga prognosintervallen) är en följd av det mycket låga väntevärdet (Riksbankens punktprognos) i kombination med en relativt stor standardavvikelse (som ju ges av historisk RMSE).

Grafen i nedre vänstra hörnet är också den baserad på gammafördelningen, men nu under antagandet att Riksbankens reporänteprognos är en medianprognos. Under detta antagande är fördelningen avsevärt mindre skev, och har ett i allmänhet rimligt utseende. En kanske mindre tilltalande bieffekt av gammafördelningen är att den fortfarande är lite skev även när reporäntan når mer 'normala' nivåer.

Den sista delgrafen i figur 4 visar ett sätt att behålla gammafördelningens attraktiva egenskaper vid låga reporäntenivåer samtidigt som man snabbare går mot en symmetrisk fördelning när reporäntan antar mer normala nivåer. Denna prognosfördelning är en så kallad blandfördelning av en gamma- och en normalfördelning:

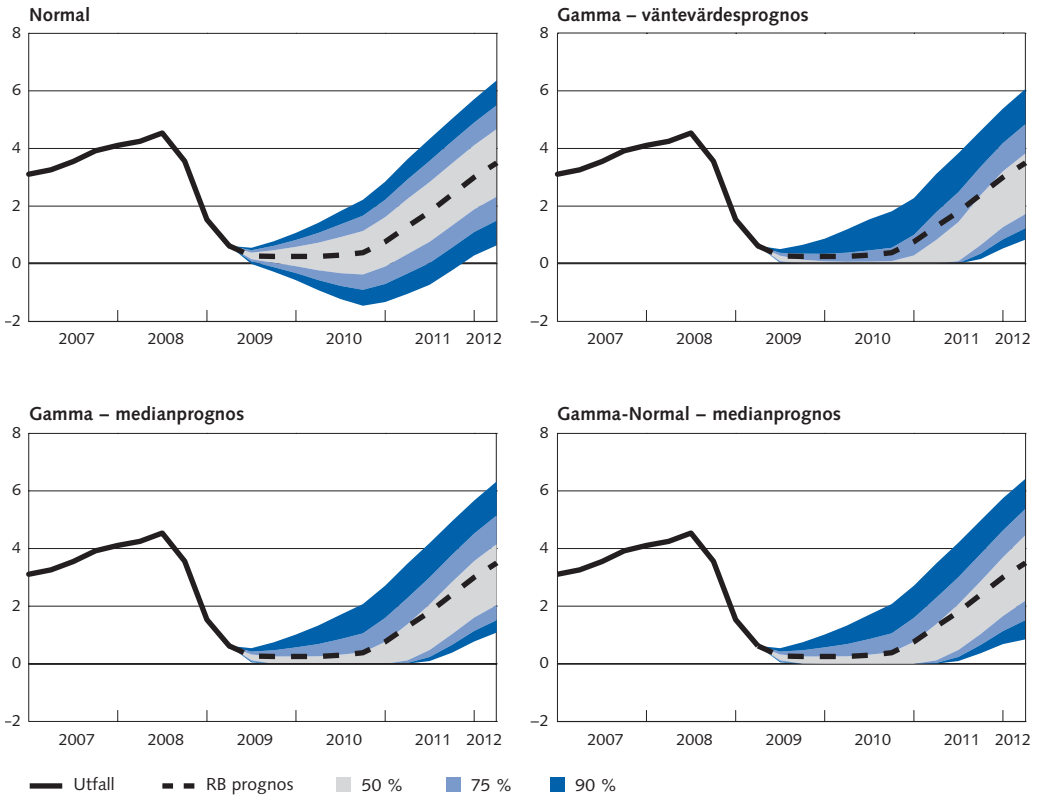
$$p(y_{T+h} | y_1, \dots, y_T) = \omega(\hat{y}_{T+h}) \cdot N(y_{T+h} | \mu_h, \sigma_h^2) + [1 - \omega(\hat{y}_{T+h})] \cdot \text{Gamma}(y_{T+h} | \alpha_h, \beta_h),$$

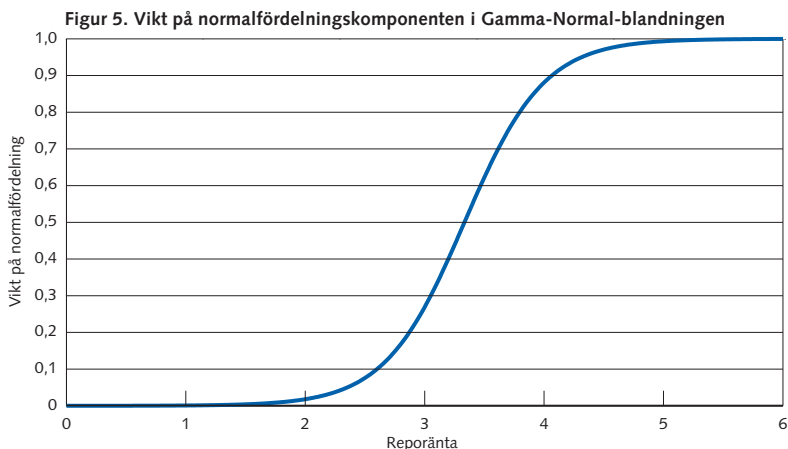
där $N(y | \mu, \sigma^2)$ betecknar täthetsfunktionen för en $N(\mu, \sigma^2)$ fördelning och $\text{Gamma}(y | \alpha, \beta)$ är täthetsfunktionen för en gammafördelning. Vikten på normalfördelningen $\omega(\hat{y}_{T+h})$ är en logistisk funktion av Riksbankens punktprognos

$$\omega(\hat{y}_{T+h}) = \frac{\exp(c_0 + c_1 \hat{y}_{T+h})}{1 + \exp(c_0 + c_1 \hat{y}_{T+h})},$$

där $c_0 = -10$ och $c_1 = 3$, vilket ger funktionen i figur 5. När reporänteprognosen är nära noll är prognosfördelning i princip samma gammafördel-

Figur 4. Rekonstruktion av prognosfördelningen för reporäntan i Penningpolitisk rapport PPR 2009:2 under olika fördelningsantaganden och olika antaganden om Riksbankens punktprognos





ning som tidigare. Vikten på normalfördelningen ökar sedan med nivån på reporäntan och redan vid en ränta på ca 4,5 procent är prognosfördelningen i princip lika med normalfördelningen.

Figur 6 är en upprepning av figur 4, men nu med de mer normala räntenivåerna som rådde när PPR 2008:3 publicerades. Alla fyra varianterna av prognosfördelningar är relativt lika varandra, men de två gammafördelningarna visar upp en viss skevhet som inte återfinns i normal eller gamma-normalmodellerna.

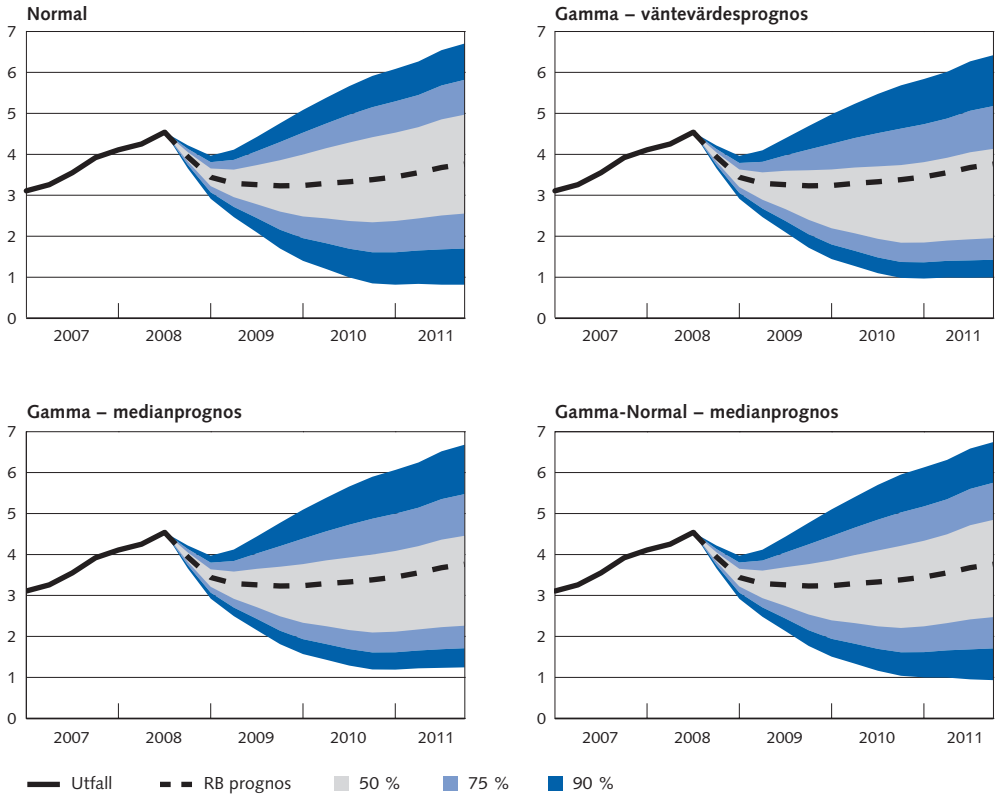
En invändning mot ovanstående analys med gammafördelningen är att utfallet där reporäntan är exakt noll inte hanteras annorlunda än andra värden på reporäntan. Man skulle kunna argumentera för följande mer generella fördelning

$$p(y_{T+h} | y_1, y_2, \dots, y_T) = \pi_h \cdot I_0(y_{T+h}) + (1 - \pi_h) \cdot \text{Gamma}(y_{T+h} | \alpha_h, \beta_h),$$

där $I_0(y_{T+h})$ är en punktmassa i punkten noll med sannolikhet π_h . Med sannolikheten π_h är alltså reporäntan exakt noll och med sannolikheten $1 - \pi_h$ följer den vår tidigare gammafördelning. Problemet med denna formulering är att det är mycket svårt att skatta π_h utifrån historiska prognoser eftersom reporäntan aldrig har varit noll historiskt. En lösning är naturligtvis att bestämma π_h subjektivt och sedan skatta parametrarna i gammafördelningen betingat på π_h enligt vår tidigare metod.

Även om gammafördelningen inte ger diskret sannolikhetsmassa till utfallet att reporäntan är exakt noll så ska det noteras att gammafördelningen ändå ger hög sannolikhet till reporänteutfall som är så nära noll att de i praktiken är ekvivalenta med en nollränta. Figur 7 visar sannolikheten att reporäntan är lägre än 25 räntepunkter för de fyra olika modellerna i

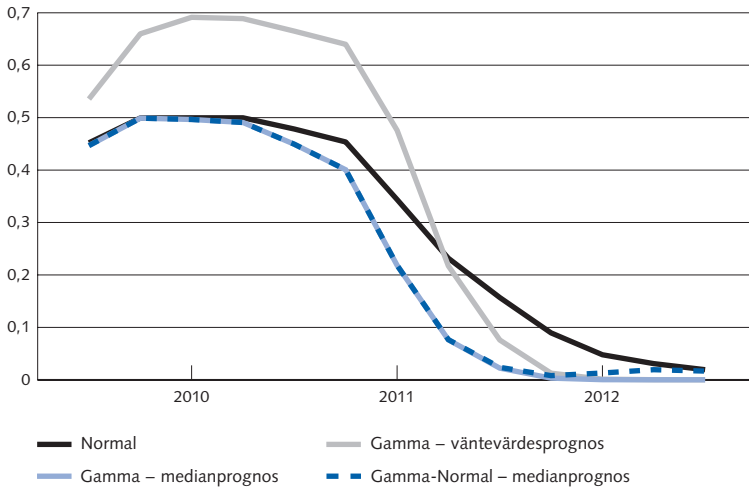
Figur 6. Rekonstruktion av prognosfördelningen för reporäntan i Penningpolitisk rapport PPR2008:3 under olika fördelningsantaganden och olika antaganden om Riksbankens punktprognos



figur 4. Alla fyra fördelningar implicerar därför en substantiell sannolikhet att reporäntan är i princip noll till och med slutet på år 2010.

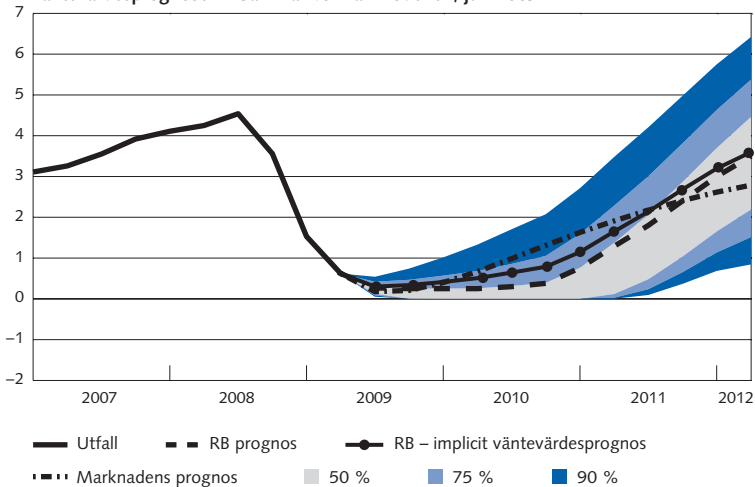
Riksbanken har under andra halvan av 2009 noterat att marknadens reporänteprognos (beräknat från implicita terminsräntor, se ovan) ligger högre än Riksbankens punktprognos. Detta skulle kunna ses som en indikation på att marknaden inte delar Riksbankens syn på de makroekonomiska utsikterna eller att Riksbanken inte lyckats förankra sina intentioner. Det är dock fullt möjligt att Riksbankens och marknadens *punktprognoser* kan divergera trots att den underliggande prognosfördelningen är densamma, se ruta 1. Om exempelvis Riksbankens prognos är en median, medan marknadens prognos är ett väntevärde, så leder gammafördelningens skevhet vid låga räntenivåer till att väntevärdesprognosen ligger högre än medianprognosen. Figur 8 jämför marknadens reporänteprognos vid två tillfällen med Riksbankens implicita väntevärdesprognos för gamma-normalmodellen (där Riksbanken antas

Figur 7. Figuren visar sannolikheten att reporäntan är mindre än 25 räntepunkter för de fyra olika fördelningarna i figur 4.



publicera en medianprognos). Det är tydligt att marknadens prognoser är avsevärt högre än Riksbankens publicerade prognos under prognosperiodens andra år, men att Riksbankens implicita väntevärdesprognos ligger mycket närmare marknadens prognos under samma tidsperiod. En omtolkning av Riksbankens punktprognos som en median snarare än ett väntevärde skulle alltså kunna förklara en stor del av gapet mellan marknadens förväntningar och Riksbankens prognos.

Figur 8. Jämförelse av Riksbankens och marknadens reporänteprognoser med väntevärdesprognosen i Gamma-Normal-modellen, juli 2009



Prognosbanden i figur 1 är ett antal prognosintervall, ett för varje prognoshorisont, som sammanbinds med linjer. Prognosintervallen vid varje prognoshorisont är så kallade *marginalintervall*, både över variabler och prognoshorisonter. Det betyder att intervallen inte innehåller någon information om samband mellan variabler (till exempel korrelationen mellan BNP-tillväxt och inflation) eller samband över olika prognoshorisonter (till exempel korrelationen mellan inflationen på ett respektive två års sikt). Vi ska i detta avsnitt beskriva dessa fakta i detalj, samt redogöra för olika typer av prognosband som föreslagits i den vetenskapliga litteraturen för att beskriva sambanden över prognoshorisonter.

I situationer med fler än en variabel används simultana sannolikhetsfördelningar för att beskriva variablernas *samvariation*. Från en simultan sannolikhetsfördelning $p(y, \pi)$ för BNP-tillväxt (y) och KPI-inflation (π) kan man till exempel beräkna sannolikheten för negativ tillväxt ($y < 0$) *samtidigt* som inflationen överstiger Riksbankens toleransintervall ($\pi < 3$). Det finns två viktiga fördelningar som kan härledas från en simultanfördelning: betingad fördelning och marginalfördelning.

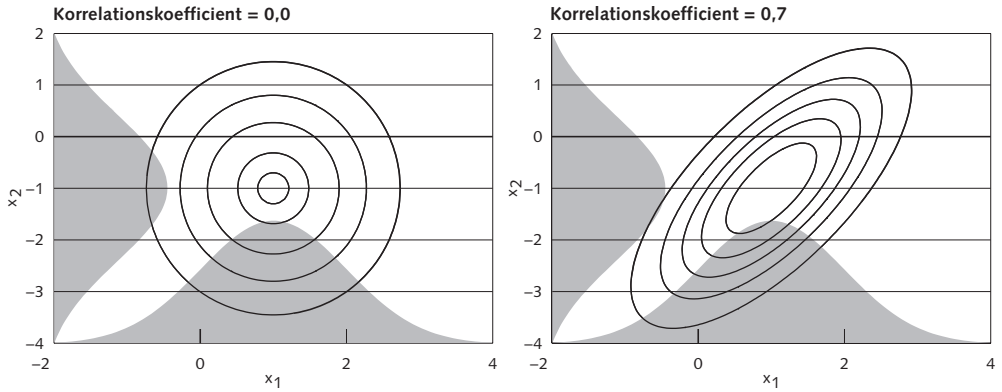
Den *betingade fördelningen* är fördelningen för inflationen π givet ett visst värde på BNP-tillväxten y och betecknas $p(\pi|y)$. Denna fördelning är alltså mer anpassad för scenarioanalys och kan svara på frågor av typen: vilken prognosfördelning har inflationen *givet* att BNP tillväxten blir noll procent?

Marginalfördelningen för π är däremot fördelningen för inflationen enbart, där hänsyn tagits till alla möjliga utfall för BNP-tillväxten genom att man viktat med sannolikheten för dessa olika utfall.²¹ Det är viktigt att förstå att marginalfördelningarna kan härledas från simultanfördelningen, men man kan inte gå i omvänd riktning: från marginalfördelningarna kan man inte återskapa simultanfördelningen. Marginalfördelningarna säger alltså ingenting om beroendet mellan variablerna, se illustrationen i figur 9 som visar att två bivariata fördelningar med olika korrelationskoefficient kan ha identiska marginalfördelningar. De osäkerhetsband som Riksbanken presenterar i PPR är marginalfördelningar för BNP-tillväxt, KPI-inflation, och reporänta. Dessa band innehåller alltså ingen information om Riksbankens syn på den framtida *samvariationen* mellan variabler.

Marginalfördelningarna måste dock vara konsistenta mellan variablerna och i denna mening finns viss samhörighet mellan variablerna kvar i de marginella fördelningarna. Om exempelvis reporäntan bestäms av en enkel Taylorregel utan hänsyn till realekonomin, det vill säga $r_t = 1,5\pi_t$,

²¹ Marginalfördelningen för inflationen beräknas alltså som $p(\pi) = \int p(\pi|y)p(y)dy$, där $p(y)$ är marginalfördelningen för y .

Figur 9. Illustration att två simultanfördelningar med olika korrelationskoefficient kan ha identiska marginalfördelningar. Simultanfördelningarna är representerade av ellipskonturer med samma täthet och marginalfördelningarna är indikerade med skuggade ytor i diagrammen



så gäller att $\text{Var}(r_t) = 1,5^2 \text{Var}(\pi_t)$, det vill säga att intervallbredden för reporäntan bör vara 1,5 gånger större än för inflationen.

På samma sätt som man kan tala om samband *mellan variabler* för en given prognoshorisont så kan man tala om sambandet för en enskild variabel *över prognoshorisonter* (till exempel vad är sannolikheten att inflationen överstiger 3 procent på **både** 1 och 2 års sikt?). Men osäkerhetsregionerna i figur 1 är ett antal *marginella* prognosintervall som binds samman med linjer, vilka alltså inte innehåller någon information om samvariation över prognoshorisonterna.²² De 90-procentiga prognosbanden i PPR beskriver alltså *inte* det område där den framtida utfallsbanan kommer att hamna med sannolikheten 90 procent, eftersom denna händelse är något som innefattar alla de 12 prognoshorisonterna simultant. Prognosbanden i figur 1 ska alltså läsas prognoshorisont för prognoshorisont, och de kan därför vara aningen vilseledande att sammanbinda dessa marginalintervall med linjer som i figur 1, men denna representation har anammats av alla centralbanker som presenterar prognosintervall. Vi kommer i fortsättningen att kalla de sammanbundna marginalintervallen i figur 1 för *marginalband*, för att skilja dem från *simultanband* som representerar den simultana fördelningen över alla prognoshorisonter.

Den faktiska simultana sannolikheten att en utfallsbana för till exempel reporäntan hamnar innanför de 90-procentiga marginalbanden i figur 1 är avsevärt lägre än 90 procent. Om vi exempelvis antar ett extremfall där en variabel följer en oberoende process helt utan persistens så

²² Intervalllet kring till exempel fyra-stepsprognosen ($h=4$) har alltså beräknats från marginalfördelningen

$$p_T(y_{T+4}) = \iiint p_T(y_{T+1}, y_{T+2}, y_{T+3}, y_{T+4}) dy_{T+1} dy_{T+2} dy_{T+3},$$

där osäkerheten kring utfallen y_{T+1} , y_{T+2} och y_{T+3} har integrerats ut.

är sannolikheten att utfallsbanan hamnar innanför marginalbanden $0,9^{12} \approx 0,282$. För att beräkna motsvarande sannolikhet för en mer persistent process, simulerar vi 1000 tidsserier med vardera 200 observationer från en autoregressiv process av första ordningen (AR(1)):

$$y_t = \mu + p(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \overset{ober}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad (3)$$

med $\mu = 2$, $\sigma = 0.25$ och $p \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.9\}$. För varje simulerad tidsserie skattar vi AR(1)-modellen i ekvation 3 rekursivt över hela stickprovet, och från och med tidpunkten $t = 100$ beräknas i varje tidsperiod en punktprognos med tillhörande prognosintervall 1–12 kvartal framåt. Prognosintervallen beräknas endast med hjälp av de historiska prognosfel som finns tillgängliga vid tidpunkten för beräkningen. Den första prognosen görs i period $t = 100$ och använder då alla tillgängliga prognosfel från och med $t = 51$ till och med period $t = 100$. Denna design är tänkt att efterlikna Riksbankens sätt att beräkna prognosintervall, med den viktiga skillnaden att vi här känner till den datagenererade processen (men inte dess parametrar). För varje simulerad tidsserie registrerar vi andelen intervall som inkluderar hela utfallsbanan y_{t+1}, \dots, y_{t+12} , vilket alltså är en simuleringsapproximation av prognosbandens simultana täckningssannolikhet. Denna övning liknar den i tabell 3 i Jorda och Marcellino (2010), men här tar vi hänsyn till estimationsosäkerheten i både punktprognosen och de skattade RMSE-talen i ett försök att bättre efterlikna Riksbankens faktiska situation.

Resultaten från simuleringarna redovisas i tabell 3, som visar att den faktiska sannolikheten att *hela* utfallsbanan hamnar innanför alla de 12 marginella intervallen är avsevärt mycket lägre än täckningssannolikheten för de marginella intervallen även vid mycket persistenta processer (se raderna benämnda 'Marginalband'; resultaten för övriga rader i tabell 3 förklaras nedan).

Man skulle kunna tänka sig att komplettera figur 1 med en motsvarande graf med de simultana prognosbanden. Problemet här är att reducera en 12-dimensionell simultanfördelning till något som ritas upp i en två-dimensionell figur i form av prognosband. En enkel ansats är att utnyttja den så kallade Bonferroni-olikheten för att skapa simultana prognosband. Bonferroniband med simultan sannolikhet $1 - \alpha$ beräknas med formel liknande den för marginalintervallen (jfr ekvation 1) ²³

²³ Bonferronis olikhet säger att $\Pr(\cap_{h=1}^H E_h) \geq 1 - \sum_{h=1}^H \Pr(\bar{E}_h)$ där E_h är händelsen att utfallet y_{T+h} hamnar innanför marginalintervallet vid prognoshorisont h , \bar{E}_h är komplementärhändelsen till E_h , det vill säga att utfallet hamnar utanför marginalintervallet. Om sannolikheten för varje marginalintervall sätts till $1 - \alpha/H$ får vi alltså $\Pr(\bar{E}_h) = \alpha/H$, och simultansannolikheten för prognosbandet uppfyller då olikheten $\Pr(\cap_{h=1}^H E_h) \geq 1 - \alpha$, det vill säga Bonferroniband ger en simultan sannolikhet på minst $1 - \alpha$.

$$y_1^{(h)} \pm z_{\alpha/2H} \times \text{RMSE}(h), \quad (3.3)$$

men notera att vi här använder $\alpha/2H$ percentilen i $N(0,1$ -fördelningen, där H är det maximala antalet prognoshorisonter i figuren, det vill säga $H=12$ i figur 1.²⁴ Där vi i det tidigare fallet med 90-procentiga marginalintervall använde värdet $z_{0,05}=-1,645$, använder vi alltså värdet $z_{0,05/12}=-2,638$ för ett 90-procentigt Bonferroniband. Bonferroniband är konservativa, det vill säga ett 90-procentigt Bonferroniband har en simultan sannolikhet på *åtminstone* 90 procent (om modellen är korrekt och dess parametrar kända). Tabell 3 visar att Bonferronibanden kommer mycket nära målsannolikheten för de 75-procentiga och 90-procentiga banden, men ger alldeles för breda 50-procentiga band, speciellt om processen är persistent. Högre ordningens Bonferroniband har studerats i Ravishanker et al. (1991) som fann dem mer korrekta än de vanliga (första ordningens) Bonferroniband.

TABELL 3: SIMULTANSANNOLIKHETEN ATT ALLA DE KOMMANDE 12 UTFALLEN HAMNAR INNANFÖR OLIKA TYPER AV PROGNOBAND.

50-procentiga prognosband				
	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,90$
Marginalband	0,0006	0,0009	0,0046	0,0168
Bonferroni	0,5880	0,6142	0,6508	0,6909
Scheffé	0,0693	0,1916	0,3826	0,4896
Scheffé top-down	0,0083	0,0473	0,1868	0,2904
75-procentiga prognosband				
	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,90$
Marginalband	0,0435	0,0609	0,1198	0,1857
Bonferroni	0,7622	0,7628	0,7879	0,7859
Scheffé	0,1537	0,3190	0,5287	0,5968
Scheffé top-down	0,1846	0,3635	0,5686	0,6295
90-procentiga prognosband				
	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,90$
Marginalband	0,2912	0,3427	0,4153	0,4967
Bonferroni	0,8865	0,8830	0,8804	0,8825
Scheffé	0,2453	0,4530	0,6252	0,6956
Scheffé top-down	0,5759	0,7414	0,8252	0,8564

Bonferronibanden är konstruerade för att kontrollera den simultana sannolikheten för utfallsbanor. Man kan lite vagt säga att en bieffekt av detta är att dessa prognosband har som högsta prioritet att undvika att utfallsbanorna alltför ofta hamnar utanför banden vid en enda prognoshorisont, se Jorda och Marcellino (2010) för en mer precis formuler-

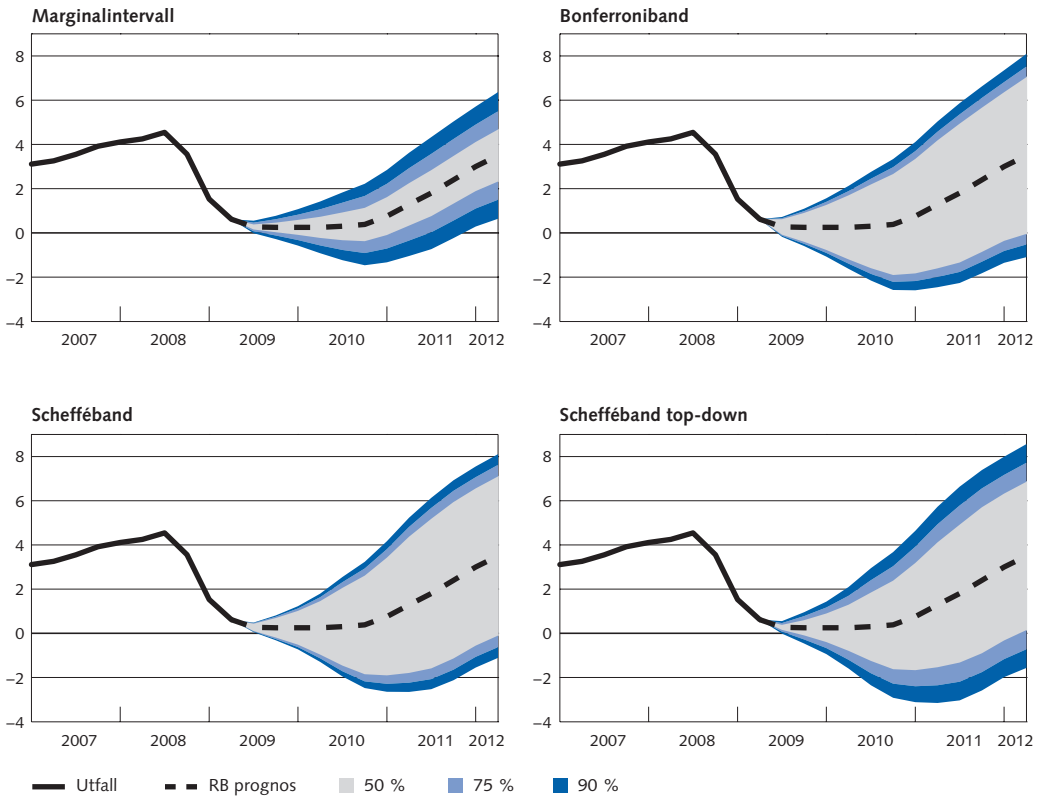
²⁴ Det bör nämnas att Bonferroniband inte antar oberoende över prognoshorisonter, något som alltför ofta felaktigt påstås i litteraturen.

ing. Jorda och Marcellino (2010) menar att denna fixering vid enstaka prognoshorisonter kan vara lämplig för vissa tillämpningar inom finansiell ekonomi, men att den är mindre rimlig vid makroekonomisk analys. De förordar istället Scheffés *S*-metod (Scheffé, 1959) för att skapa simultana prognosband. Schefféband konstrueras för att kontrollera Mahalanobis-avståndet mellan prognosbanan och utfallsbanan, vilket innebär att denna metod lägger mer vikt på avvikelser vid fler än en prognoshorisont. I tabell 3 ser vi att Scheffébanden är för smala vid 50-, 75- och 90-procentnivån, men att de blir mer korrekta vid högre persistens. Notera dock att Scheffébanden inte är konstruerade för att kontrollera den simultana sannolikheten för utfallsbanor i den mening som vi mäter i tabell 3. Scheffébanden är dock mycket bättre än Bonferroni-banden på att kontrollera Mahalanobis-avståndet mellan utfallsbanan och punktprognosen, se simuleringsresultaten i tabell 3 i Jorda och Marcellino (2010).

I den akademiska litteraturen om prognosband antas implicit att man alltid bör presentera simultana prognosband. Det finns dock två goda skäl till att marginalband används i praktiken: i) simultanband har nackdelen att det inte går att läsa av exempelvis prognosintervallet för inflationen på 1 år sikt, ii) simultanbandens bredd beror på valet av maximal prognoshorisont, H , det vill säga simultanbanden ser annorlunda ut om Riksbanken väljer att presentera dem för 1–8 kvartal jämfört med 1–12 kvartal. På samma sätt blir simultanbanden för inflation mycket olika om de presenteras som månadsutfall ($H=36$) eller kvartalsutfall ($H=12$). Det senare problemet diskuteras i Jorda och Marcellino (2010) och de föreslår en så kallad top-down ansats där simultanintervallen inte längre beror på H . Simuleringsresultaten i tabell 3 visar att dessa modifierade Schefféband faktiskt ger en mer korrekt simultansannolikhet för de 75-procentiga och 90-procentiga prognosbanden än de ursprungliga Scheffébanden, men top-down ansatsen fungerar sämre för det 50-procentiga prognosbandet.

Figur 10 illustrerar de olika prognosbanden för reporäntan i PPR juli 2009. Alla typer av simultanband är naturligtvis avsevärt bredare än marginalbanden, speciellt vid de lägre täckningssannolikheterna 50 och 75 procent.

Figur 10. Illustration av olika sätt att konstruera simultana prognosband för reporäntan i PPR 2009:2



Slutsatser

Vi har beskrivit hur Sveriges riksbank beräknar prognosintervall för reporäntan, KPI-inflationen och BNP-tillväxten med en metod baserad på variationen i historiska prognosfel. Metoden är enkel och lättförståelig och har fördelen att den inte är beroende av en specifik modell. Detta medför att intervallen även inkluderar osäkerhet om ekonomins funktionssätt. Sveriges riksbank började dock relativt nyligen att publicera sin egen reporänteprognos vilket innebär att endast ett fåtal prognosfel finns tillgängliga för denna variabel, speciellt vid de längre prognoshorisonterna. Vi redogör för hur Riksbanken har valt att lösa detta problem genom att istället använda den implicita reporänteprognosen, justerad för terminspremier, från den finansiella marknaden.

Vi har föreslagit ett antal potentiella förbättringar av Riksbankens nuvarande intervallkonstruktion, bland annat en metod för att införa tidsvariation i prognosintervallens bredd. Denna förändring har fördelen att prognosbanden exempelvis kan bli bredare i mer osäkra tider. Det faktum

att reporäntan ligger mycket nära sin undre gräns (som är noll eller något lägre) ställer också nya krav på prognosbanden. Vi har därför introducerat ett enkelt sätt att konstruera prognosintervall för reporäntan i samma anda som den nuvarande metoden, men där reporäntan inte kan bli negativ. Slutligen har vi även diskuterat för- och nackdelar med olika metoder för att konstruera prognosband som beskriver den simultana osäkerheten över alla 12 prognoshorisonter.

Vi vill avsluta den här artikeln med att återigen påpeka att Riksbankens prognosintervall beskriver allmän ekonomisk osäkerhet, och därmed skiljer sig från punktprognosen, som ska uppfattas som Riksbankens intention, se avsnitt 1. Det ska dock inte uteslutas att prognosbanden i framtiden kommer att kompletteras eller ersättas av prognosband med en intentionstolkning. Riksbankens huvudmodell för strukturell analys, Ramses (Adolfson et al., 2007b), har relativt nyligen implementerats med optimal penningpolitik (Adolfson et al., 2008b), och skulle därför kunna användas för detta syfte. Det är en öppen fråga om denna modell genererar prognosband med rimlig bredd eller om modellen behöver tillåta tidsvariation i störningarnas varianser för att uppnå en korrekt intervallsannolikhet.

Appendix A. Finansiell modell av avkastningskurvan för svenska räntebärande statspapper

Riksbanken använder en så kallad tre-faktormodell för att modellera hur avkastningskurvan för svenska räntebärande statspapper utvecklas över tiden, se exempelvis Backus et al. (2000) för en genomgång av fler-faktor-modeller. Enligt modellen beror både den kortfristigaste räntan och mer långfristiga obligationsräntor på tre faktorer $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})$ som antas följa modellen

$$x_{t+1} = \Phi x_t + \varepsilon_t,$$

där ε_t är en exogen stokastisk chock med diagonal kovariansmatris Σ , och chockerna antas här vara oberoende innovationer. Korträntan bestäms enligt ekvationen

$$r_t = d_0 + x_{1t} + x_{2t} + x_{3t}.$$

I modellen antas även att det inte går att göra riskfria arbitragevinster mellan obligationer med olika löptid, samt att räntan på alla obligationer följer det fundamentala prissättningssambandet

$$P_t = E_t(P_{t+1} M_{t,t+1})$$

som anger att obligationspriset är det förväntade diskonterade framtida priset på obligationen. Diskonteringen bestäms av den stokastiska diskonteringsfaktorn M som bestäms av korträntan, priset på risk λ , chockerna till x_t och chockernas kovariansmatris

$$M_{t,t+1} = e^{-r_t - \lambda' \Sigma \lambda / 2 - \lambda' \varepsilon_{t+1}}.$$

Utifrån dessa antaganden kan det visas att räntan y på nollkupongsobligationer med löptiden n också beror på de tre faktorerna, korträntan, riskpriset och variansen i faktorerna (se Ang och Piazzesi (2003) för en härledning

$$y_t(n) = -\frac{1}{n} [A(n) + B(n)' x_t]$$

där

$$A(n) = A(n-1) + B(n-1)' \Sigma B(n-1) / 2 - d_0 - B(n-1)' \Sigma \lambda$$

och

$$B(n) = B(n-1)' \Phi - 1.$$

I $y_t(n)$ inkluderas löptidspremier som beror på riskpriset λ . Men på grund av att modellen kan identifiera riskpremier för olika löptider kan modellen även användas för att beräkna terminsräntor där riskpremiekomponenten är exkluderad. Denna terminsränta f_t^* för korträntan r om n tidsenheter kan skrivas som

$$f_t^*(n) = d_0 + \Phi^n x_t.$$

Genom att beräkna $f_t^*(n)$ för alla n upp till prognoshorisonten (36 månader) och för alla observerade (månatliga) terminsräntekurvor sedan 1998 erhålls modellens tolkning av marknadens prissatta prognos för korträntan. $f_t^*(n)$ är den prognos som används för att beräkna de RMSE-värden som beskriver den historiska prognosprecisionen av reporäntan.

De tre underliggande faktorerna i x_t är inte direkt observerbara. För att göra statistisk inferens för x_t -processen länkas de tre faktorerna till observerbara mätvariabler. Som mätvariabler använder Riksbanken beräknade nollkupongräntor (för att slippa komplexiteten från räntekuponger) för statsobligationer samt enkätsvar om marknadsanalytikernas förväntningar om den framtida reporäntenivån (Kim och Orphanides, 2005). Data är på månadsfrekvens och korträntan i modellen är därför enmånadsräntan, vilket bedöms vara en godkänd approximation till Riksbankens styrränta. Kalmanfiltret används för att göra inferens på de underliggande faktorerna i x_t utifrån de observerade mätvariablerna (Hamilton, 1994). Simultant med denna filtrering skattas modellens parametrar med maximum likelihood-metoden.

I takt med att Riksbanken vidareutvecklar den här modellen kan den komma att inkludera riskpremier som tillåts variera över tiden. Den typen av utveckling kräver dock ett mer avancerat estimeringsarbete och utvärdering av den estimerade modellens egenskaper.

Appendix B. RMSE-baserade intervall från en gammafördelning

RIKSBANKENS PROGNOIS ÄR ETT VÄNTEVÄRDE

Om vi betraktar Riksbankens prognos som ett väntevärde kan man beräkna gammafördelningens parameter genom att lösa följande ekvationssystem med avseende på α_h och β_h

$$E(Y) = \alpha_h \beta_h = \hat{y}^{(h)}$$

$$Std(Y) = \sqrt{\alpha_h} \beta_h = RMSE(h)$$

vilket ger lösningen

$$\alpha_h = \left(\frac{\hat{y}^{(h)}}{RMSE(h)} \right)^2$$

$$\beta_h = \frac{RMSE(h)^2}{\hat{y}^{(h)}}.$$

RIKSBANKENS PROGNOIS ÄR EN MEDIAN

Om vi istället betraktar Riksbankens prognos som en median är prognosfelen $e_t = y_t - \text{Median}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$, där $\text{Median}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ är medianen i gammaprognosfördelningen. För att kunna lösa ut gammafördelningens två parametrar α_h och β_h behöver vi nu uttryck för medianen i en gammafördelning och för $E(e_t^2)$ (som ska matchas mot $(1/T) \sum_{t=1}^T e_t^2$). Lite algebra ger att om $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ så gäller att

$$\text{Median}(Y) = \beta \Gamma^{-1}(\alpha, 1/2)$$

och

$$E[Y - \text{Median}(Y)]^2 = \beta^2 \{ \alpha(1+\alpha) - 2\alpha \Gamma^{-1}(\alpha, 1/2) + [\Gamma^{-1}(\alpha, 1/2)]^2 \}$$

där $\Gamma^{-1}(\alpha, 1/2)$ är inversen till den regulariserade ofullständiga gammafunktionen (Abramowitz och Stegun, 1965). Om prognosfördelningen är $\text{Gamma}(\alpha_h, \beta_h)$ och Riksbankens punktprognos är att betrakta som

en median så kan man beräkna prognosfördelningens parameter genom att lösa det icke-linjära ekvationssystemet

$$\beta_h \Gamma^{-1}(\alpha_h, 1/2) = \hat{y}^{(h)}$$

$$\beta_h^2 \{ \alpha_h (1 + \alpha_h) - 2\alpha_h \Gamma^{-1}(\alpha_h, 1/2) + [\Gamma^{-1}(\alpha_h, 1/2)] \} = RMSE(h)$$

för α_h och β_h . Om vi substituerar $\beta_h = \hat{y}^{(h)}/\Gamma^{-1}(\alpha_h, 1/2)$ i den andra ekvationen kan vi sedan lösa ekvationen

$$(\hat{y}^{(h)})^2 \left[\frac{\alpha_h (1 + \alpha_h)}{(\Gamma^{-1}(\alpha_h, 0, 1/2))^2} - \frac{2\alpha_h}{\Gamma^{-1}(\alpha_h, 0, 1/2)} + 1 \right] = RMSE(h)$$

numeriskt för α_h med till exempel Newtons metod. Lösningen för β_h ges nu av $\beta_h = \hat{y}^{(h)}/\Gamma^{-1}(\alpha_h, 1/2)$.

Referenser

- Abramowitz, M. och Stegun, I. A. (1965). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table. Courier Dover Publications.
- Adolfson, M., Andersson, M. K., Lindé, J., Villani, M., och Vredin, A. (2007a). Modern forecasting models in action: Improving macro economic analyses at central banks. *International Journal of Central Banking*, 3:111–44.
- Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J., och Villani, M. (2007b). Ramses – a new general equilibrium model for monetary policy analysis. *Sveriges Riksbank Economic Review*, 2:5–39.
- Adolfson, M., Lindé, J., och Villani, M. (2007c). Forecasting performance of an open economy DSGE model. *Econometric Reviews*, 26(2):289–328.
- Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J., och Villani, M. (2008a). Evaluating an estimated new Keynesian small open economy model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(8):2690–2721.
- Adolfson, M., Laséen, S., Lindé, J., och Svensson L.E.O. (2008b). Optimal monetary policy in an operational medium-sized DSGE model. Sveriges Riksbank Working Paper Series, 225.
- Aguilar, J. och Hördahl, P. (1999). Optionspriser och marknadens förväntningar. *Penning- och valutapolitik*, 1:43–70.
- Alsterlind, J. och Dillén, H. (2005). Monetary policy expectations and forward premia. *Sveriges Riksbank Economic Review*, 2:39–53.
- Ang, A. och Piazzesi, M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*, 50(4):745–787.
- Backus, D., Foresi, S., och Telmer, C. (2000). Bond pricing in discrete time. *Advanced Fixed Income Valuation Tools*. Wiley.
- Beechey, M. och Elmér, H. (2009). Reporäntans nedre gräns. Sveriges Riksbanks Ekonomiska Kommentarer, 11.
- Bernardo, J. M. och Smith, A. F. M. (1994). Bayesian Theory. Wiley, Chichester.
- Blix, M. och Sellin, P. (1999). Inflationsprognos med osäkerhetsintervall. *Penning- och valutapolitik*, 2:12–28.
- Campbell, J. och Shiller, R. (1991). Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view. *The Review of Economic Studies*, 58(3):495–514.
- Chatfield, C. (1993). Calculating interval forecasts. *Journal of Business & Economic Statistics*, pages 121–135.
- Chatfield, C. (2001). Time-series forecasting. CRC Press.

- Christiano, L. J., Eichenbaum, M., och Evans, C. L. (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy*, 113(1):1–45.
- Clark, T. E. (2009). Real-time density forecasts from vars with stochastic volatility. Research Working Paper no. 2009–08, Federal Reserve Bank of Kansas City.
- Cogley, T., Morozov, S., och Sargent, T. (2005). Bayesian fan charts for UK inflation: Forecasting and sources of uncertainty in an evolving monetary system. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(11):1893–1925.
- De Finetti, B. (1975). *Theory of probability, Vol 1*. Wiley New York.
- Edge, R., Kiley, M., och Laforte, J. (2008). A comparison of forecast performance between Federal Reserve staff forecasts, simple reduced-form models, and a DSGE model. *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.
- French, S. och Insua, D. R. (2000). *Kendall's Library of Statistics 9: Statistical Decision Theory*. Wiley.
- Giordani, P. och Villani, M. (2009). Forecasting macroeconomic time series with locally adaptive signal extraction. *International Journal of Forecasting*, forthcoming.
- Hallsten, K. och Tägtström, S. (2009). Beslutsprocessen, hur det går till när Riksbankens direktion ska bestämma om reporäntan. *Penning- och valutapolitik*, 1:69–84.
- Hoeting, J. A., Madigan, D., Raftery, A. E., och Volinsky, C. T. (1999). Bayesian model averaging: a tutorial. *Statistical science*, pages 382–401.
- Jorda, O. och Marcellino, M. (2010). Path forecast evaluation. *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.
- Jore, A. S., Mitchell, J., och Vahey, S. P. (2009). Combining forecast densities from vars with uncertain instabilities. *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.
- Kim, D. och Orphanides, A. (2005). Term structure estimation with survey data on interest rate forecasts. Finance and Economics Discussion Paper 2005–48, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- King, R., Plosser, C., och Rebelo, S. (1988). Production, growth and business cycles: I. the basic neoclassical model. *Journal of Monetary Economics*, 21(2–3):195–232.
- Lawrence, M., Goodwin, P., O'Connor, M., och Onkal, D. (2006). Judgmental forecasting: A review of progress over the last 25 years. *International Journal of Forecasting*, 22(3):493–518.

- Ravishanker, N., Shiao-Yen Wu, L., och Glaz, J. (1991). Multiple prediction intervals for time series: Comparison of simultaneous and marginal intervals. *Journal of Forecasting*, 10:445–463.
- Scheffé, H. (1959). *The analysis of variance*. Wiley.
- Sims, C. A. (2002). The role of models and probabilities in the monetary policy process. *Brookings Papers on Economic Activity*, pages 1–63.
- Smets, F. och Wouters, R. (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association*, 1(5): 1123–1175.
- Söderström, U. och Westermark, A. (2009). Penningpolitik när styrräntan är noll. *Penning- och valutapolitik*, 2:5–30.
- Svensson, L. E. O. och Söderlind, P. (1997). New techniques to extract market expectations from financial instruments. *Journal of Monetary Economics*, 40(2): 383–429.
- Svensson, L. E. O. och Williams, N. (2007). Monetary policy with model uncertainty: Distribution forecast targeting. Technical report, Princeton University.
- Villani, M. (2009). Steady-state priors for vector autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, 24(4).
- Wallis, K. F. (1989). Macroeconomic forecasting: A survey. *The Economic Journal*, 99(394):28–61.
- Woodford, M. (2003). *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*. Princeton University Press.
- Zimmermann, C. (2001). Forecasting with real business cycle models. *Indian Economic Review*, 36:189–203.